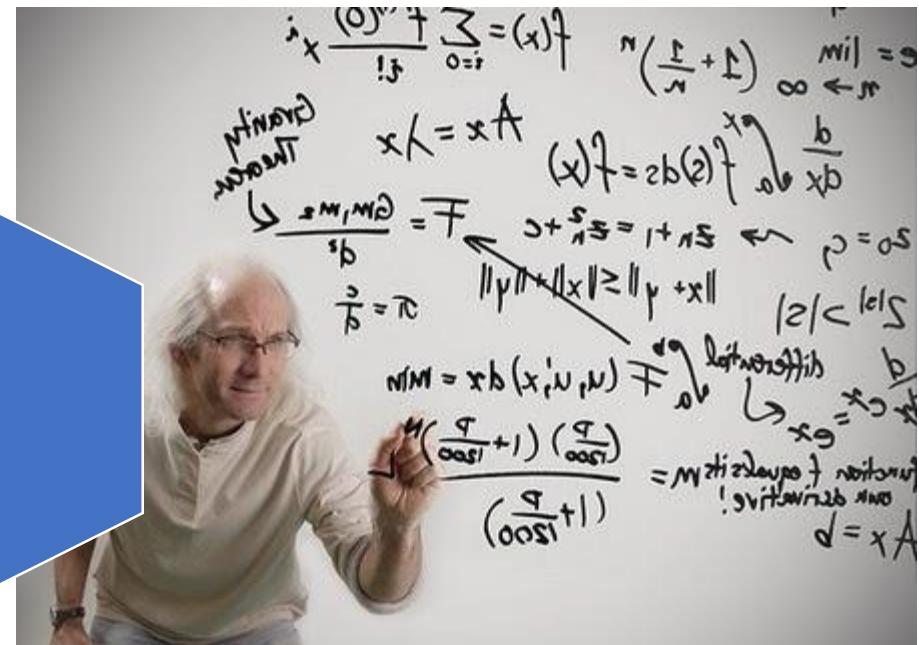


ANALISIS NUMERIK

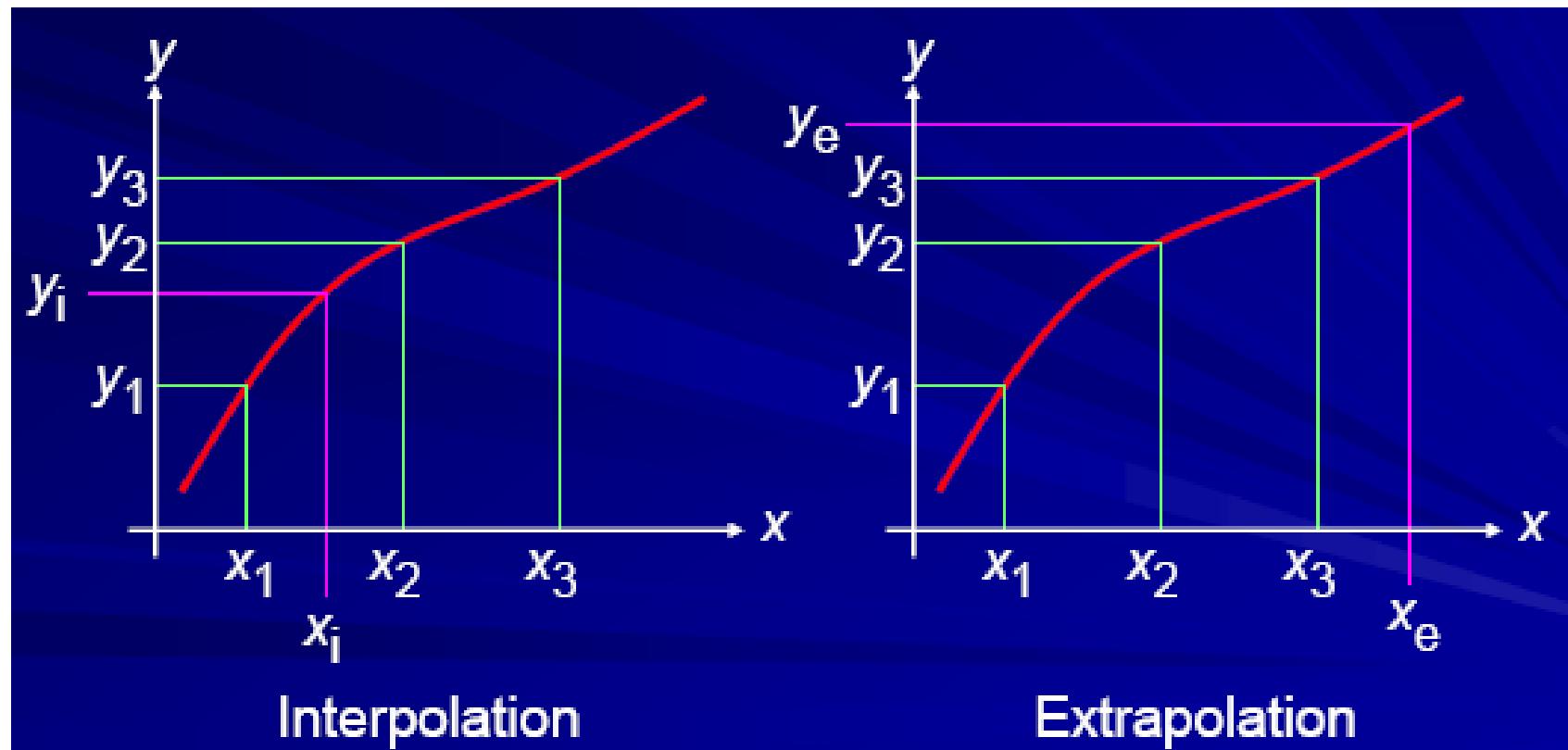




INTERPOLASI

Tujuan

- Interpolasi berguna untuk menaksir harga-harga tengah antara titik data yang sudah tepat.
- Interpolasi mempunyai orde atau derajat.



Macam Interpolasi



Interpolasi Beda Terbagi Newton

Interpolasi Lagrange

Interpolasi Spline

Interpolasi Beda Terbagi Newton

• Interpolasi Linier

Derajat/orde 1 → memerlukan 2 titik

x	f(x)
1	4,5
2	7.6
3	9.8
4	11.2

Berapa $f(x = 1,325) = ?$

Memerlukan 2 titik awal :

$$x = 1$$

$$x = 2$$

Interpolasi Beda Terbagi Newton

- **Interpolasi Kuadratik**

Derajat/orde 2 → memerlukan 3 titik

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \rightarrow f(x = 1) = \dots \\ x = 2 \rightarrow f(x = 2) = \dots \\ x = 3 \rightarrow f(x = 3) = \dots \end{array} \right\} f(x = 1,325) = ?$$

Interpolasi Beda Terbagi Newton

- **Interpolasi Kubik**

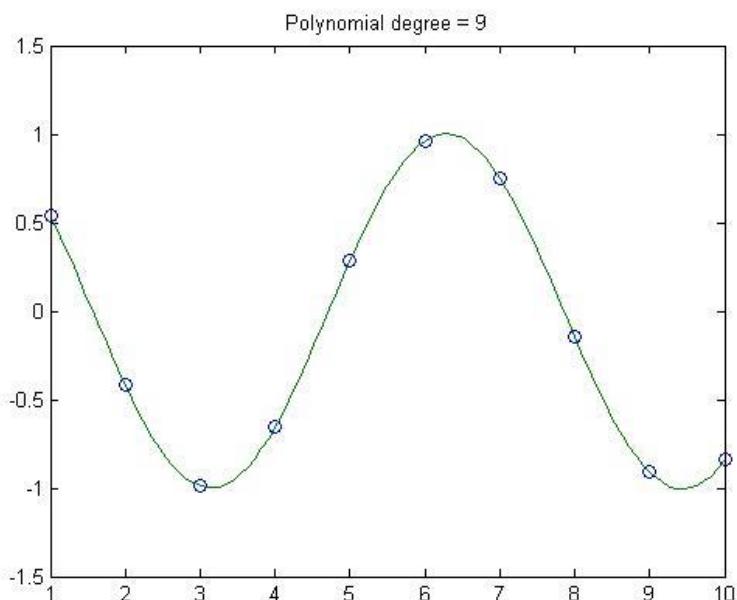
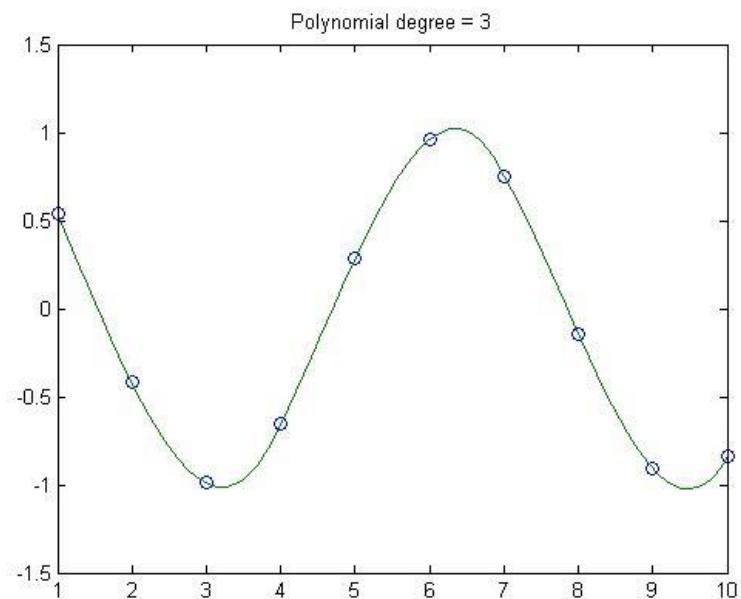
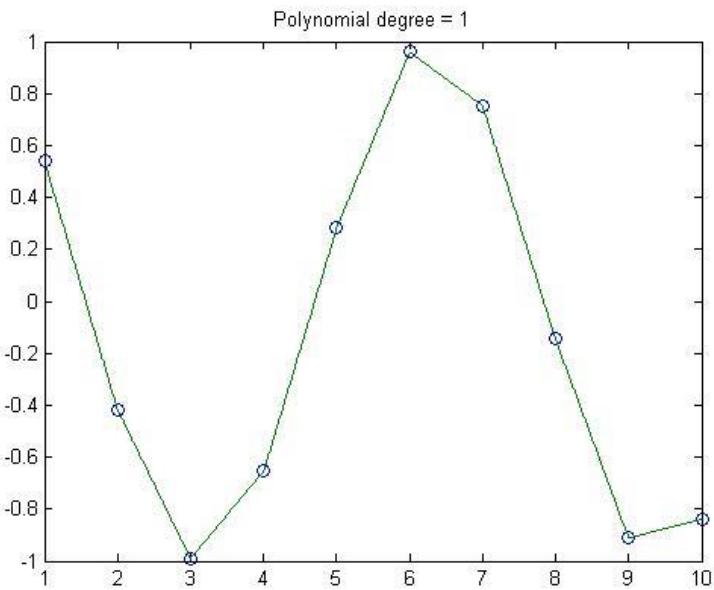
Derajat/orde 3 → memerlukan 4 titik

...

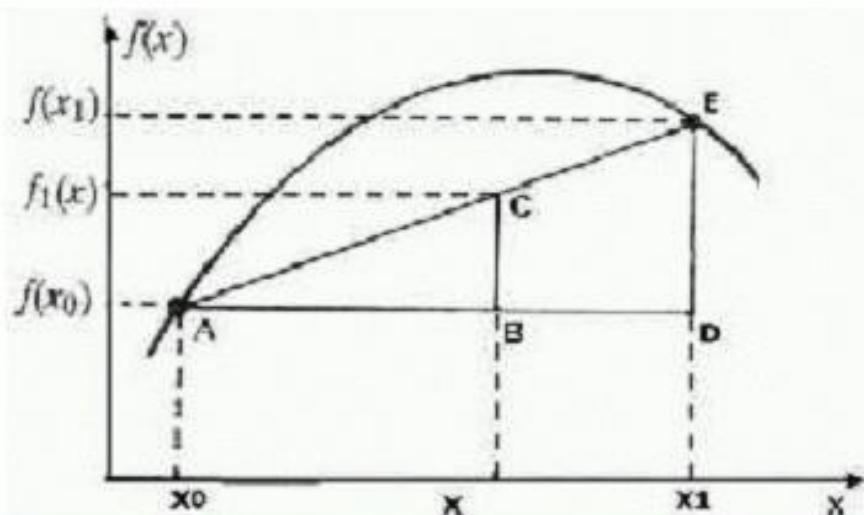
- **Interpolasi derajat/orde ke-n**

→ memerlukan $n+1$ titik

- *“Semakin tinggi orde yang digunakan untuk interpolasi hasilnya akan semakin baik (teliti).”*



Interpolasi Linier



- Cara: menghubungkan 2 titik dengan sebuah garis lurus
- Pendekatan formulasi interpolasi linier sama dengan persamaan garis lurus.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

atau

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

sehingga

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Interpolasi Linier

- Prosentase kesalahan pola interpolasi linier :

$$\varepsilon_t = \frac{\text{Harga_hasil_perhitungan} - \text{Harga_sebenarnya}}{\text{Harga_sebenarnya}}$$

Contoh : Interpolasi Linier (1)

- Diketahui suatu nilai tabel distribusi ‘Student t’ sebagai berikut :

$$t_{5\%} = 2,015$$

$$t_{2,5\%} = 2,571$$

$$\text{Berapa } t_{4\%} = ?$$

Contoh : Interpolasi Linier (1)

- Penyelesaian

$$x_0 = 5 \rightarrow f(x_0) = 2,015$$

$$x_1 = 2,5 \rightarrow f(x_1) = 2,571$$

$$x = 4 \rightarrow f(x) = ?$$

Dilakukan pendekatan dengan orde 1 :

$$\begin{aligned}f_1(x) &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \\&= 2,015 + \frac{(2,571 - 2,015)}{2,5 - 5}(4 - 5) \\&= 2,2374 \approx 2,237\end{aligned}$$

Contoh : Interpolasi Linier (2)

- Diketahui:

$$\log 3 = 0,4771213$$

$$\log 5 = 0,698700$$

- Harga sebenarnya:

$$\log (4,5) = 0,6532125 \text{ (kalkulator).}$$

- Harga yang dihitung dengan interpolasi:

$$\log (4,5) = 0,6435078$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0,6435078 - 0,6532125}{0,6532125} * 100\% \right| = 1,49\%$$

Interpolasi Linier

- Pendekatan interpolasi dengan derajat 1, pada kenyataannya **sama dengan** mendekati suatu harga tertentu melalui garis lurus.
- Untuk memperbaiki kondisi tersebut dilakukan sebuah interpolasi dengan membuat garis yang menghubungkan titik yaitu melalui **orde 2, orde 3, orde 4**, dst, yang sering juga disebut **interpolasi kuadratik, kubik**, dst.

Interpolasi Kuadratik

- Interpolasi orde 2 sering disebut sebagai interpolasi kuadratik, memerlukan 3 titik data.
- Bentuk polinomial orde ini adalah :

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

dengan mengambil:

$$a_0 = b_0 - b_1x_0 + b_2x_0x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 + b_2x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Interpolasi Kuadratik

- Sehingga

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$$


Pendekatan dengan
garis linier Pendekatan dengan
kelengkungan

dengan $b_0 = f(x_0)$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \rightarrow f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} \rightarrow f[x_2, x_1, x_0]$$

Interpolasi Kubik

- $f_3(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

dengan:

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \rightarrow f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)} \rightarrow f[x_2, x_1, x_0]$$

$$b_3 = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{(x_3 - x_0)} \rightarrow f[x_3, x_2, x_1, x_0]$$

Interpolasi Beda Terbagi Newton

- Secara umum:

$$f_1(x) = b_0 + b_1(x-x_0)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1)$$

$$\begin{aligned} f_3(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} f_n(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + \\ b_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Interpolasi Beda Terbagi Newton

Dengan:

- $b_0 = f(x_0)$
- $b_1 = f[x_1, x_0]$
- $b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$
- ...
- $b_n = f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]$

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

- Hitung nilai tabel distribusi ‘Student t’ pada derajat bebas dengan $\alpha = 4\%$, jika diketahui:

$$t_{10\%} = 1,476 \quad t_{2,5\%} = 2,571$$

$$t_{5\%} = 2,015 \quad t_{1\%} = 3,365$$

dengan interpolasi Newton orde 2 dan orde 3!

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

Penyelesaian:

Interpolasi Newton Orde 2: → butuh 3 titik

- $x_0 = 5 \quad f(x_0) = 2,015$
- $x_1 = 2,5 \quad f(x_1) = 2,571$
- $x_2 = 1 \quad f(x_2) = 3,365$
- $b_0 = f(x_0) = 2,015$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{2,571 - 2,015}{2,5 - 5} = -0,222$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}}{(x_2 - x_0)}$$

$$= \frac{\frac{3,365 - 2,571}{1 - 2,5} - \frac{2,571 - 2,015}{2,5 - 5}}{1 - 5} = 0,077$$

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

$$\begin{aligned} \bullet f_2(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &= 2,015 + (-0,222) (4-5) + \\ &\quad 0,077 (4-5)(4-2,5) \\ &= 2,121 \end{aligned}$$

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

Interpolasi Newton Orde 3: → butuh 4 titik

$$\bullet x_0 = 5 \quad f(x_0) = 2,015$$

$$x_1 = 2,5 \quad f(x_1) = 2,571$$

$$x_2 = 1 \quad f(x_2) = 3,365$$

$$x_3 = 10 \quad f(x_3) = 1,476$$

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

- $b_0 = f(x_0) = 2,015$

$$b_1 = -0,222 \rightarrow f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = 0,077 \rightarrow f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{\frac{1,476 - 3,365}{10 - 1} - \frac{3,365 - 2,571}{1 - 2,5}}{\frac{10 - 2,5}{10 - 5}} - 0,077 \\ &= \frac{0,043 - 0,077}{5} \\ &= -0,007 \end{aligned}$$

Contoh : Interpolasi Beda Terbagi Newton

$$\begin{aligned}\bullet f_3(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \\&\quad b_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\&= 2,015 + (-0,222)(4-5) + \\&\quad 0,077 (4-5)(4-2,5) + \\&\quad (-0,007)(4-5)(4-2,5)(4-1) \\&= 2,015 + 0,222 + 0,1155 + 0,0315 \\&= 2,153\end{aligned}$$

Kesalahan Interpolasi Beda Terbagi Newton

- $R_n = |f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$

- Menghitung R_1

Perlu 3 titik (karena ada x_{n+1})

$$R_1 = |f[x_2, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1)|$$

- Menghitung R_2

Perlu 4 titik sebagai harga awal

$$R_2 = |f[x_3, x_2, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$$

Contoh : Kesalahan Interpolasi Beda Terbagi Newton

- Berdasarkan contoh diatas:

$$\begin{aligned} R_1 &= |f[x_2, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1)| \\ &= |0.077 (4-5)(4-2.5)| \\ &= 0.1155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= |f[x_3, x_2, x_1, x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| \\ &= |-0.007 (4-5)(4-2.5)(4-1)| \\ &= 0.0315 \end{aligned}$$

Interpolasi Lagrange

- Interpolasi Lagrange pada dasarnya dilakukan untuk menghindari perhitungan dari differensiasi terbagi hingga (Interpolasi Newton)
- Rumus:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

dengan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-1

$$f_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\therefore f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-2

$$f_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \\ &\quad \begin{matrix} i=0 \\ n=2 \\ j \neq i \end{matrix} \quad \begin{matrix} i=1 \\ n=2 \\ j \neq i \end{matrix} \quad L_1(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$\therefore f_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) f(x_2)$$

Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-3

$$f_3(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

$$f_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \right) f(x_1) + \\ \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right) f(x_2) + \left(\frac{x - x_0}{x_3 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right) f(x_3)$$

Contoh : Interpolasi Lagrange

- Berapa nilai distribusi t pada $\alpha = 4 \text{ %}$?

$$\alpha = 2,5 \% \quad \rightarrow x_0 = 2,5 \quad \rightarrow f(x_0) = 2,571$$

$$\alpha = 5 \% \quad \rightarrow x_1 = 5 \quad \rightarrow f(x_1) = 2,015$$

$$\alpha = 10 \% \quad \rightarrow x_2 = 10 \quad \rightarrow f(x_2) = 1,476$$

Contoh : Interpolasi Lagrange

- Penyelesaian
- Pendekatan orde ke-1

$$f_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{4 - 5}{2,5 - 5} \right)(2,571) + \left(\frac{4 - 2,5}{5 - 2,5} \right)(2,015) \\ &= \underline{\underline{2,237}} \end{aligned}$$

Contoh : Interpolasi Lagrange

- Pendekatan orde ke-2

$$f_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$\therefore f_2(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} \right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) f(x_1) + \left(\frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) f(x_2)$$

$$= \left(\frac{4 - 5}{2,5 - 5} \right) \left(\frac{4 - 10}{2,5 - 10} \right) (2,571) + \left(\frac{4 - 2,5}{5 - 2,5} \right) \left(\frac{4 - 10}{5 - 10} \right) (2,015) + \left(\frac{4 - 2,5}{10 - 2,5} \right) \left(\frac{4 - 5}{10 - 5} \right) (1,476) \\ = \underline{\underline{2,214}}$$

Interpolasi Spline

- Metode numeric yang dapat digunakan untuk pencarian interpolasi.
- Interpolasi spline merupakan polinom sepotong-potong.

Interpolasi Spline linear

- Menghubungkan titik-titik data yang berdekatan dengan sebuah garis lurus.

$$\bullet f_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Contoh :diberikan table berisi 5 himpunan data algoritma natural

- Cari nilai interpolasi saat $x = [1.11 \quad 1.22 \quad 1.33 \quad 1.44 \quad 1.49]$

i	x_i	$F(x_i)$
1	1.1	0.0953
2	1.2	0,1823
3	1.3	0.2624
4	1.4	0.3365
5	1.5	0.4055

Penyelesaian:

- $f_1(x) = 0.0953 + \frac{(0.1823 - 0.0953)}{1.2 - 1.1} (x - 1.1)$ $1.1 \leq x \leq 1.2$
- $f_2(x) = 0.1823 + \frac{(0.2624 - 0.1823)}{1.3 - 1.2} (x - 1.2)$ $1.2 \leq x \leq 1.3$
- $f_3(x) = 0.2624 + \frac{(0.3365 - 0.2624)}{1.4 - 1.3} (x - 1.3)$ $1.3 \leq x \leq 1.4$
- $f_4(x) = 0.3365 + \frac{(0.4055 - 0.3365)}{1.5 - 1.4} (x - 1.4)$ $1.4 \leq x \leq 1.5$

x	$F(x)$
1.11	0.104
1.22	0.1983
1.33	0.2846
1.44	0.3641
1.49	0.3986

Interpolasi Spline kuadratik

1. Spline harus melalui titik-titik data

$$f_i(x_i) = a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f(x_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \quad (\text{pers. 1})$$

$$f_i(x_{i+1}) = a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = f(x_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \quad (\text{pers. 2})$$

2. Spline harus kontinyu pada bagian dalam titik-titik data. (turunan pertama)

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_{i+1} + B_{I+1} \quad I = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \quad (\text{pers. 3})$$

3. Kondisi terakhir yang dapat dibentuk bebas sebagai turunan kedua spline diantara dua titik pertama menjadi nol.

$$a_i = 0$$

Contoh :diberikan table berisi 5 himpunan data algoritma natural

- Cari nilai interpolasi saat $x = [1.11 \quad 1.22 \quad 1.33 \quad 1.44 \quad 1.49]$

i	x_i	$F(x_i)$
1	1.1	0.0953
2	1.2	0,1823
3	1.3	0.2624
4	1.4	0.3365
5	1.5	0.4055

Penyelesaian :

- Persamaan 1 menghasilkan

$$1.21a_1+1.1b_1+c_1=0.0953$$

$$1.44a_2+1.2b_2+c_2=0.1823$$

$$1.69a_3+1.3b_3+c_3=0.2624$$

$$1.96a_4+1.4b_4+c_4=0.3365$$

- Persamaan 2 menghasilkan :

$$1.44a_1+1.2b_1+c_1=0.1823$$

$$1.69a_2+1.3b_2+c_2=0.2624$$

$$1.96a_3+1.4b_3+c_3=0.3365$$

$$2.2a_4+1.5b_4+c_4=0.4055$$

- Persamaan 3 menghasilkan

$$2.4a_1+b_1=2.4a_2+b_2$$

$$2.6a_2+b_2=2.6a_3+b_3$$

$$2.8a_3+b_3=2.8a_4+b_4$$

- Persamaan 4 Menghasilkan :

$$a_1=0$$

- Dengan menggunakan pensubtitusian maka didapatkan:

$$a_1=0 \quad b_1=0.87 \quad c_1=-0.8617$$

$$a_2=-0.69 \quad b_2=2.526 \quad c_2=-1.8553$$

$$a_3=0.09 \quad b_3=0.498 \quad c_3=-0.5371$$

$$a_4=-0.6 \quad b_4=2.43 \quad c_4=-1.8895$$

- Maka persamaan spline kuadrat yang dihasilkan adalah:

$$f_1(x) = 0.87x - 0.8617 \quad 1.1 \leq x \leq 1.2$$

$$f_2(x) = -0.669x^2 + 2.526x - 1.8553 \quad 1.2 \leq x \leq 1.3$$

$$f_3(x) = 0.09x^2 + 0.498x - 0.5371 \quad 1.3 \leq x \leq 1.4$$

$$f_4(x) = -0.6x^2 + 2.43x - 1.8895 \quad 1.4 \leq x \leq 1.5$$

x	$F(x)$
1.11	0.104
1.22	0.1994
1.33	0.2844
1.44	0.3655
1.49	0.3991

Polinom Newton

- Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena :
 - Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
 - Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Karena tidak ada hubungannya antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange
- Polinom yang dibentuk sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk polinom derajat yang lebih tinggi.

Polinom Newton

- Persamaan Polinom Linier

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk pers ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

- Yang dalam hal ini $a_0 = y_0 = f(x_0)$

- Dan

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

- Pers ini mrpk bentuk selish terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Polinom Newton

- Polinom kuadratik

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Atau

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dari pers ini menunjukkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari pers sebelumnya $p_1(x)$. Nilai a_2 dapat ditemukan dengan mengganti $x=x_2$ untuk mendapatkan

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Nilai a_0 dan a_1 pada pers 1 dan 2 dimasukkan pada pers 3

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Polinom Newton

- Dengan melakukan utak-atik aljabar, pers ini lebih disukai

$$a_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Polinom Newton

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Polinom Newton

- Nilai konstanta $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, merupakan nilai selisih terbagi , dg nilai

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Polinom Newton

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :
 - Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]$$

- basis
- Atau dalam bentuk $p_n(x) = f(x_0)$ polinom yang lengkap sbb :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] \end{aligned}$$

Contoh Soal :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri $f(x)=\cos(x)$ dalam range $[0.0, 4]$ dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah $f(x)$ dengan $x=2.5$ dengan Polinom Newton derajat 3.

x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0.0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3.0	-0.99	0.3363			
4.0	-0.6536				

Contoh Soal :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

Contoh Soal :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan $x_0 = 0$ sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\begin{aligned}\cos(x) \approx p_3(x) &= 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + \\&0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x) \approx p_4(x) &= 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) + \\&0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)\end{aligned}$$

- Nilai sejati $f(2.5)$ adalah
 - $F(2.5) = \cos(2.5) = -0.8011$

The end....

