

# Persamaan Non Linier

# Persamaan Non Linear

Penyelesaian persamaan non-linear adalah menghitung akar suatu persamaan non-linear dengan satu variabel  $x$ ,  $f(x)$ , atau secara umum dituliskan :

$$f(x) = 0$$

Contoh:

$$1. \ f(x) = 5 - 4x + 9x^2 + 12x^3 - x^5 = 0$$

$$2. \ f(x) = \frac{5 - 4x + 9x^2 + 12x^3 - x^5}{2x + 5} - 12 = 0$$

$$3. \ f(x) = x - e^{-x} = 0$$

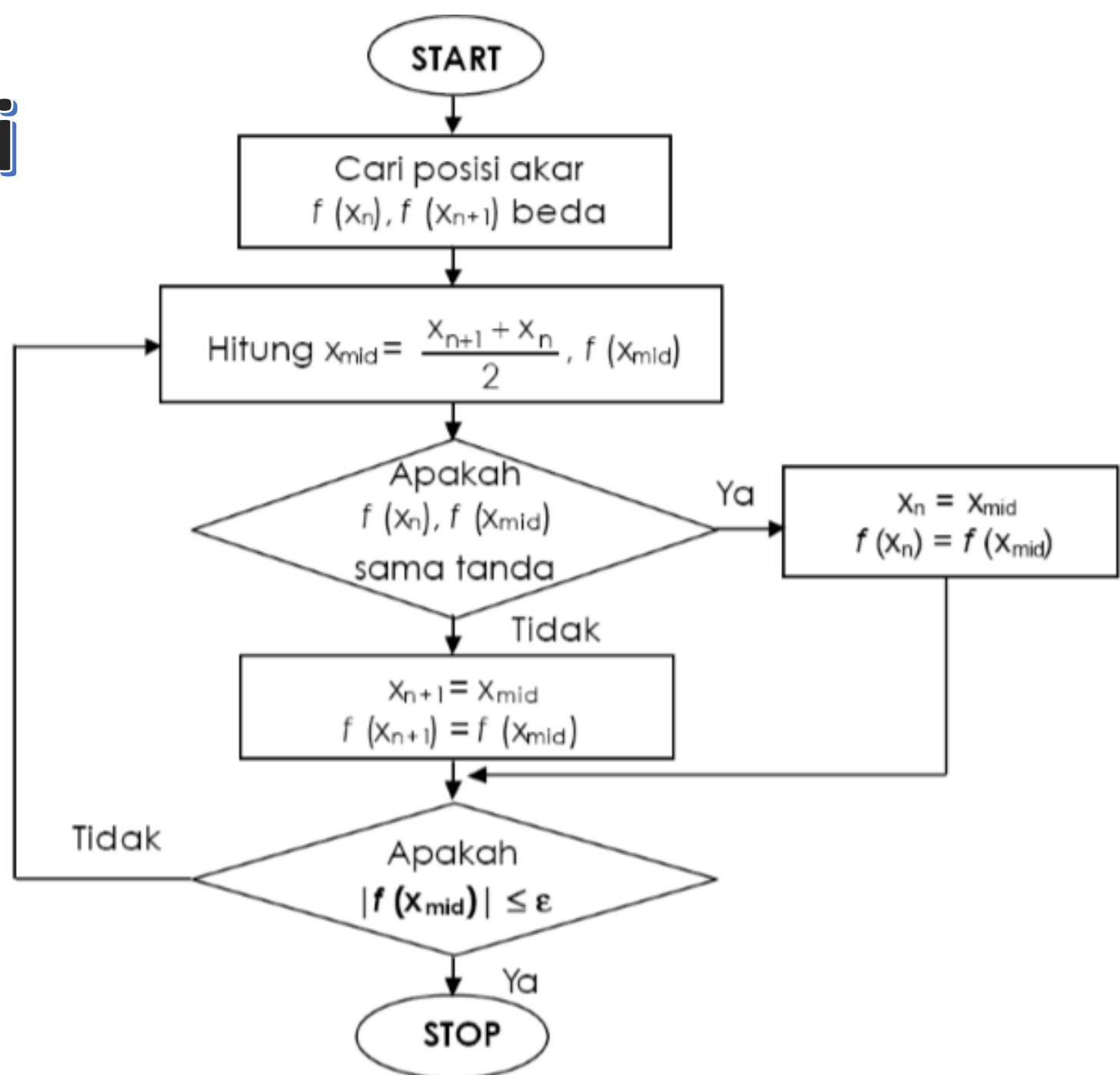
# Metode Numerik

## Persamaan Non Linear

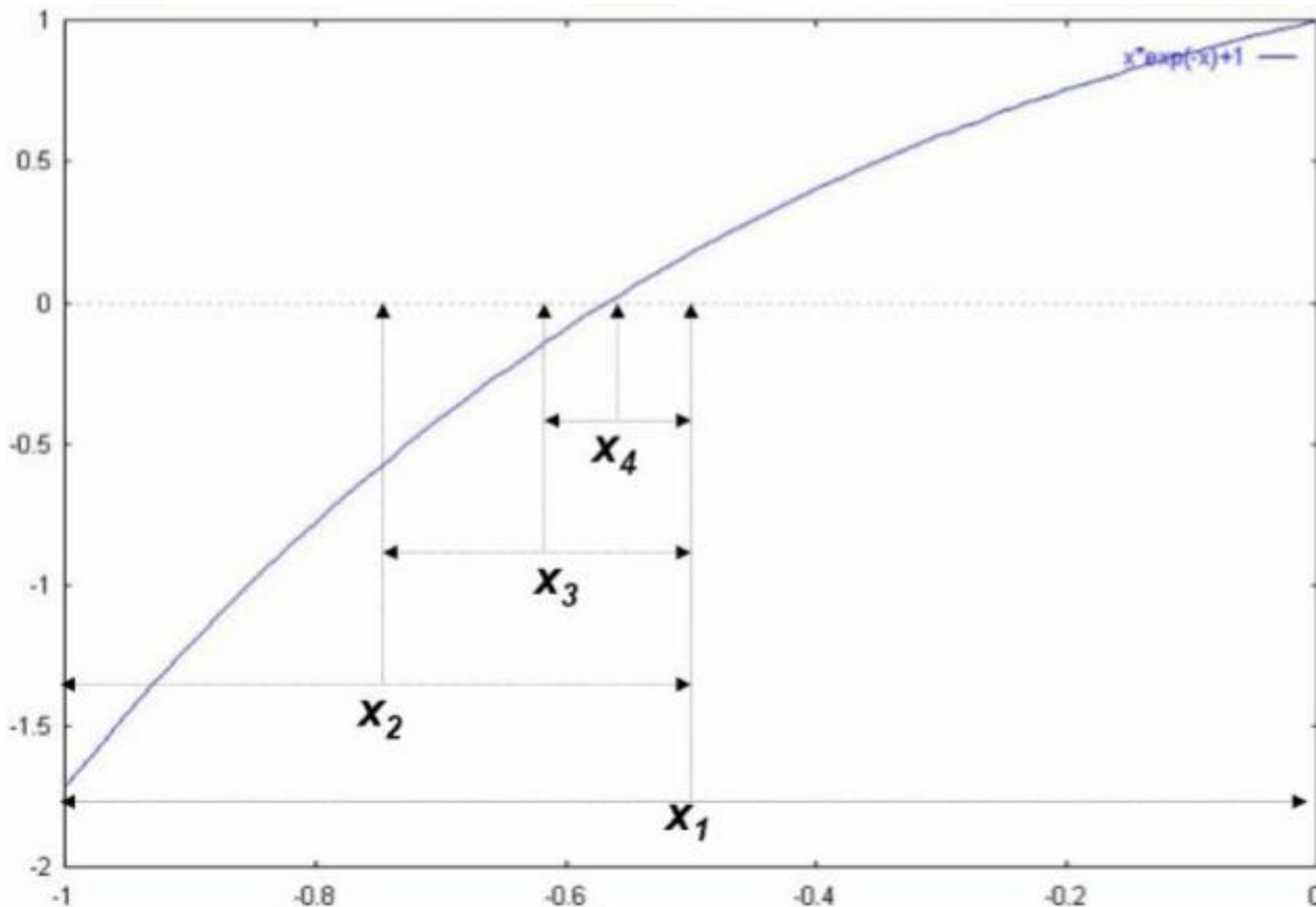
1. Metode Biseksi (*Bisection*)
2. Metode Regula Falsi (*False Position*)
3. Metode Newton-Raphson
4. Metode Secant
5. Metode Iterasi Tetap (*Fixed Point Iteration*)

# Metode Biseksi

Algoritma



# Grafik biseksi



# Hal-hal yang perlu diperhatikan:

- ↳ Fungsi harus kontinu pada interval  $x_n$  dan  $x_{n+1}$ .
- ↳ Menentukan  $x_n$  dan  $x_{n+1}$  dapat diperoleh dengan membuat grafik fungsinya.
- ↳ Nilai toleransi (error) dapat ditentukan oleh pengguna ataupun didasarkan pada bidang ilmu dari permasalahan yang diselesaikan.

## **Kelebihan Metode Biseksi**

- ↳ Selalu berhasil menemukan akar (solusi) yang dicari, atau dengan kata lain selalu konvergen.

## **Kekurangan Metode Biseksi**

- ↳ Metode biseksi hanya dapat dilakukan apabila ada akar persamaan pada interval yang diberikan.
- ↳ Jika ada beberapa akar pada interval yang diberikan maka hanya satu akar saja yang dapat ditemukan.
- ↳ Memiliki proses iterasi yang banyak sehingga memperlama proses penyelesaian. Tidak memandang bahwa sebenarnya akar atau solusi yang dicari dekat sekali dengan batas interval yang digunakan.

## **Contoh:**

Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

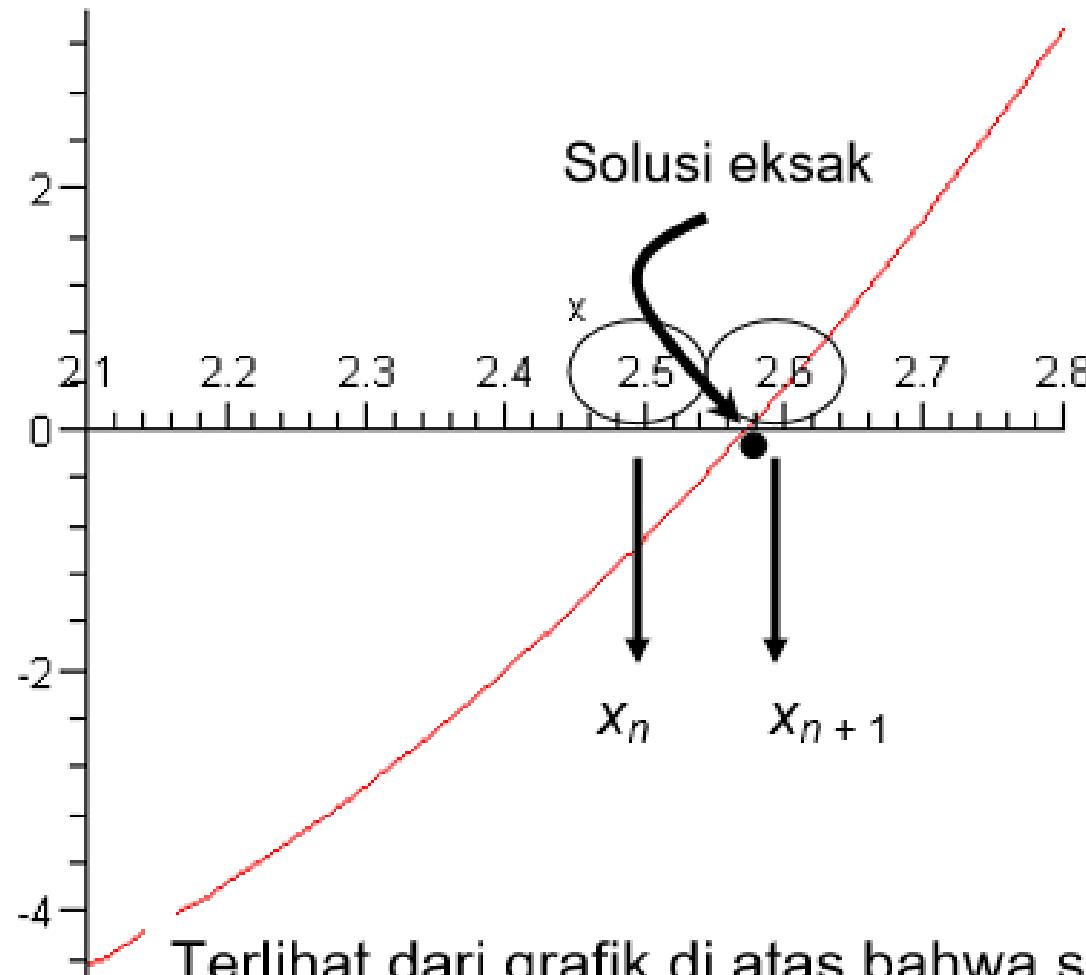
dengan error 0.005.

*Penyelesaian:*

- Dengan Metode Biseksi**

*Langkah 1 : Membuat grafik dari  $y = x^3 - 7x + 1$  untuk memperoleh batas interval  $x_n$  dan  $x_{n+1}$ .*

Dengan program *Maple* diperoleh grafik  $y = x^3 - 7x + 1$  sebagai berikut:



Terlihat dari grafik di atas bahwa solusi dari  $y = x^3 - 7x + 1$  ada pada interval 2.5 dan 2.6, maka digunakan  $x_n = 2.5$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .

*Langkah 2 : Hitung nilai  $f(x_n), f(x_{n+1})$ ,  $x_{mid} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$  dan  $f(x_{mid})$ .*

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x_{mid}$	$f(x_{mid})$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269

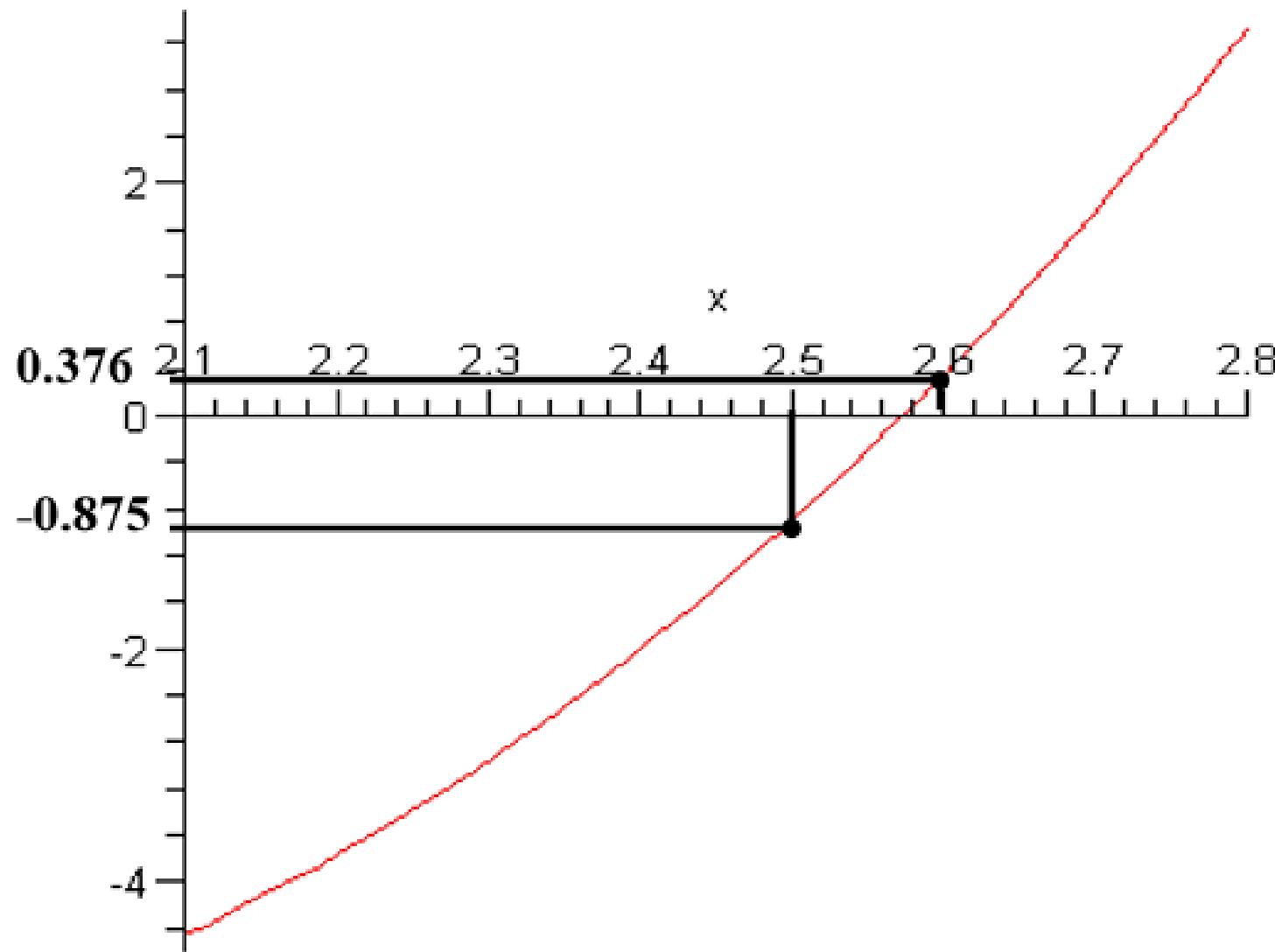
$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

$$f(x_n) = f(2.5) = (2.5)^3 - 7(2.5) + 1 = -0.875$$

$$f(x_{n+1}) = f(2.6) = (2.6)^3 - 7(2.6) + 1 = 0.376$$

$$x_{mid} = \frac{2.5 + 2.6}{2} = 2.55$$

$$f(x_{mid}) = f(2.55) = (2.55)^3 - 7(2.55) + 1 = -0.269$$



Langkah 3 : Apakah  $f(x_n)$  dan  $f(x_{\text{mid}})$  sama tanda? Jika sama tanda maka  $x_{\text{mid}}$  menggantikan  $x_n$ , sedangkan jika berbeda tanda maka  $x_{\text{mid}}$  menggantikan  $x_{n+1}$ .

Terlihat dari tabel 1,  $f(x_n) = -0.875$  dan  $f(x_{\text{mid}}) = -0.269$

sama tanda, maka  $x_{\text{mid}} = 2.55$  menggantikan  $x_n = 2.5$ .

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x_{\text{mid}}$	$f(x_{\text{mid}})$
1.	<del>2.5</del>	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269
2.	2.55	2.6	-0.269	0.376		

sama tanda

*Langkah 4 : Apakah  $|f(x_{\text{mid}})| \leq 0.005$ ? Jika ya, maka  $x_{\text{mid}} = 2.55$  merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut, jika tidak, ulangi langkah 2 dengan  $x_n = 2.55$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .*

Dikarenakan  $|f(x_{\text{mid}})| = 0.269 > 0.005$  maka ulangi langkah 2 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x_{\text{mid}}$	$f(x_{\text{mid}})$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.55	-0.269
2.	2.55	2.6	-0.269	0.376	2.575	0.049
3.	2.55	2.575	-0.269	0.049	2.562	-0.117
4.	2.562	2.575	-0.117	0.049	2.568	-0.041
5.	2.568	2.575	-0.041	0.049	2.572	0.010
6.	2.568	2.572	-0.041	0.010	2.570	-0.015
7.	2.570	2.572	-0.041	0.010	<u>2.571</u>	-0.003

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.269 > 0.005$$

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.049 > 0.005$$

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.117 > 0.005$$

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.041 > 0.005$$

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.010 > 0.005$$

$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.015 > 0.005$$

$|f(x_{\text{mid}})| = 0.003 \leq 0.005$  maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu  $x = 2.571$ .

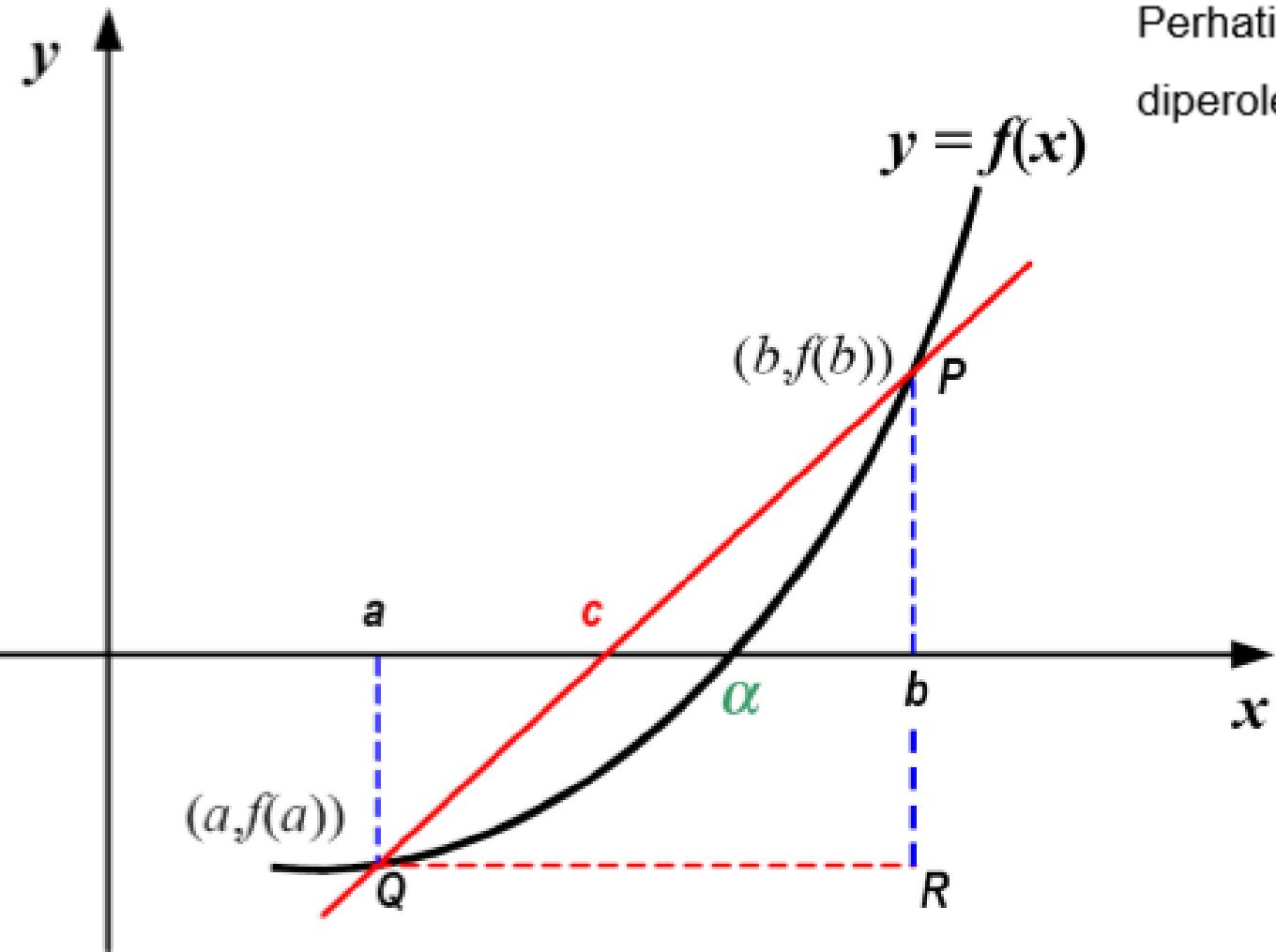
# Metode Regula Falsi

Algoritma Metode Regula Falsi = Algoritma Metode

Biseksi hanya tinggal mengganti rumus  $x_{mid} = \frac{x_{n+1} + x_n}{2}$

menjadi  $x^* = x_n - f(x_n) \left[ \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \right]$ .

# Grafis regula falsi



Perhatikan kesebangunan 2 segitiga Pcb dan PQR, maka diperoleh

$$\frac{Pb}{bc} = \frac{PR}{RQ}$$

$$\frac{f(b)-0}{b-c} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$c = b - f(b) \left[ \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right]$$

## **Contoh:**

Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

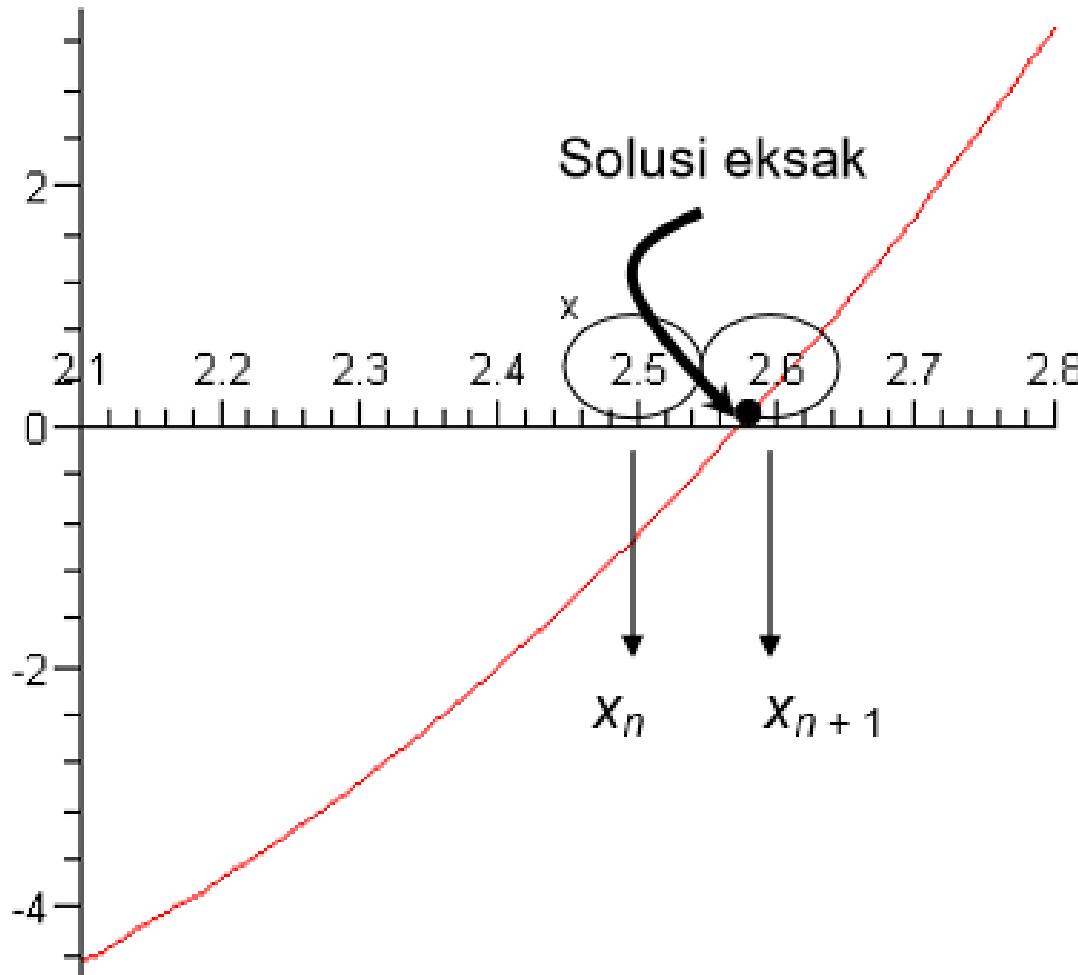
dengan error 0.005.

*Penyelesaian :*

- **Dengan Metode Regula Falsi**

*Langkah 1 : Membuat grafik dari  $y = x^3 - 7x + 1$  untuk memperoleh batas interval  $x_n$  dan  $x_{n+1}$ .*

Dengan program *Maple* diperoleh grafik  $y = x^3 - 7x + 1$  sebagai berikut:



Terlihat dari grafik di atas bahwa solusi dari  $y = x^3 - 7x + 1$  ada pada interval 2.5 dan 2.6, maka digunakan  $x_n = 2.5$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .

Langkah 2 : Hitung nilai  $f(x_n), f(x_{n+1})$ ,

$$x^* = x_n - f(x_n) \left[ \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)} \right] \text{ dan } f(x^*).$$

**Tabel 1**

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x^*$	$f(x^*)$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.57	-0.015

$$f(x) = x^3 - 7x + 1$$

$$f(x_n) = f(2.5) = (2.5)^3 - 7(2.5) + 1 = -0.875$$

$$f(x_{n+1}) = f(2.6) = (2.6)^3 - 7(2.6) + 1 = 0.376$$

$$x^* = 2.5 - (-0.875) \left[ \frac{2.6 - 2.5}{0.376 - (-0.875)} \right] = 2.57$$

$$f(x^*) = f(2.57) = (2.57)^3 - 7(2.57) + 1 = -0.015$$

Langkah 3 : Apakah  $f(x_n)$  dan  $f(x^*)$  sama tanda? Jika sama tanda maka  $x^*$  menggantikan  $x_n$ , sedangkan jika berbeda tanda maka  $x^*$  menggantikan  $x_{n+1}$ .

Terlihat dari tabel 1,  $f(x_n) = -0.875$  dan  $f(x^*) = -0.015$  sama tanda, maka  $x^* = 2.57$  menggantikan  $x_n = 2.5$ .

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x^*$	$f(x^*)$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.57	-0.015
2.	2.57	2.6	-0.015	0.376		

sama tanda

Langkah 4 : Apakah  $|f(x^*)| \leq 0.005$ ? Jika ya, maka

$x^* = 2.57$  merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut,  
jika tidak, ulangi langkah 2 dengan  $x_n = 2.57$  dan  $x_{n+1} = 2.6$ .

Dikarenakan  $|f(x_{\text{mid}})| = 0.015 > 0.005$  maka ulangi langkah 2  
sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$x^*$	$f(x^*)$
1.	2.5	2.6	-0.875	0.376	2.57	-0.015
2.	2.57	2.6	-0.015	0.376	2.571	0.003

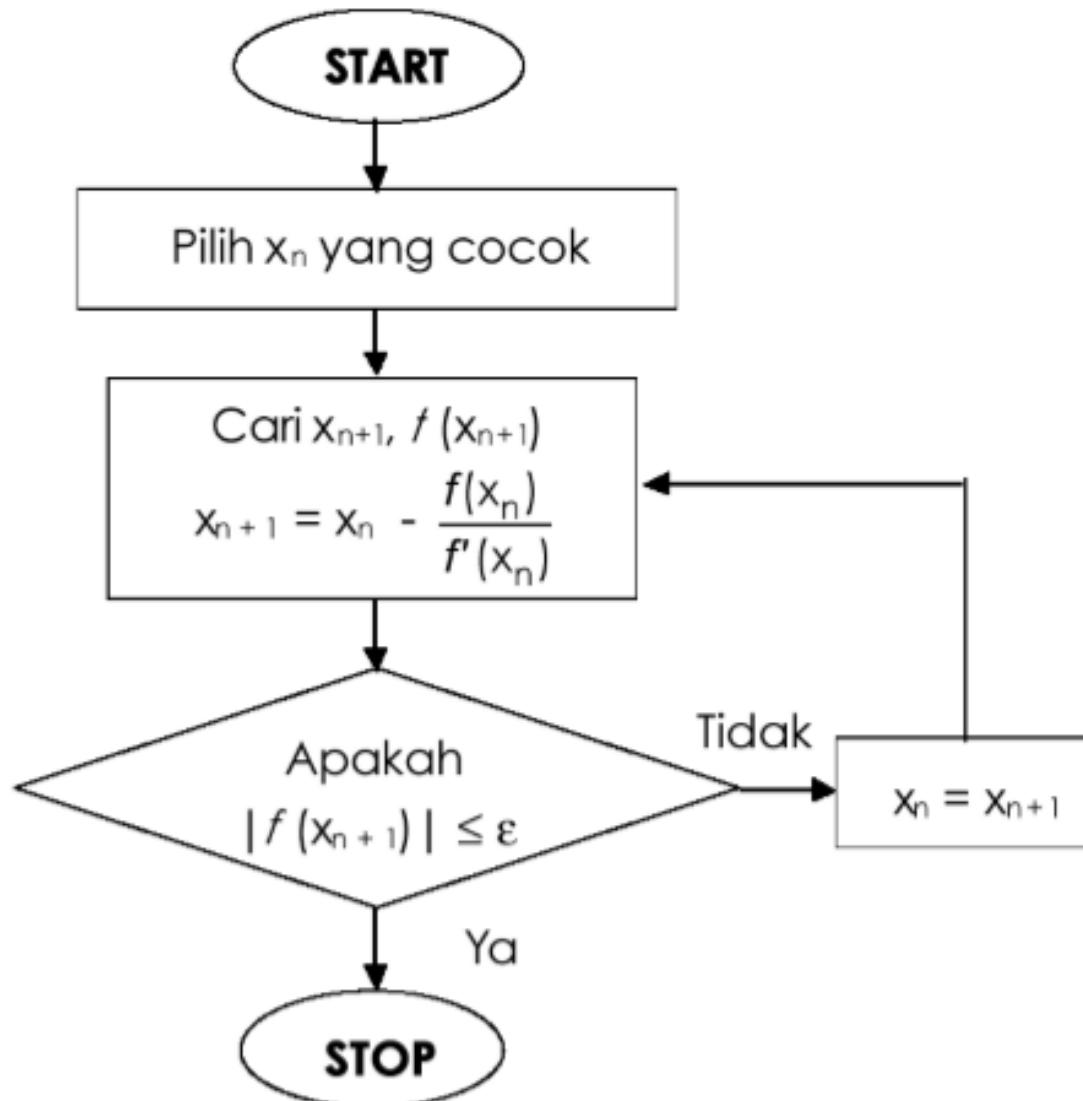
$$|f(x_{\text{mid}})| = 0.015 > 0.005$$

sama tanda

$|f(x_{\text{mid}})| = 0.003 \leq 0.005$  maka iterasi dihentikan dan  
diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan  
yaitu  $x = 2.571$ .

# Newton Raphson

A  
L  
G  
O  
R  
I  
T  
M  
A



# Newton Raphson

## **Kelebihan:**

- ↳ Konvergensi yang dihasilkan lebih cepat.

## **Kelemahan:**

- ↳ Tidak selalu menemukan akar (divergen).
- ↳ Kemungkinan sulit dalam mencari  $f'(x_n)$ .
- ↳ Penetapan harga awal ( $x_n$ ) yang sulit.

**Contoh:**

Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

dengan error 0.03.

*Penyelesaian :*

*Langkah 1 :* Menentukan nilai awal,  $x_n$ .

Misalkan dipilih  $x_n = 2.5$ .

*Langkah 2 :* Hitung  $x_{n+1}$ ,  $f(x_{n+1})$ , dan  $x_{n+1} = x_n - \left[ \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right]$ .

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$
1.	2.5	2.574	-0.875	0.04
$f(x) = x^3 - 7x + 1$				
$f'(x) = 3x^2 - 7$				
$f(x_n) = f(2.5) = (2.5)^3 - 7(2.5) + 1 = -0.875$				
$f'(x) = 3(2.5)^2 - 7 = 11.75$				
$x_{n+1} = x_n - \left[ \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right] = 2.5 - \left[ \frac{-0.875}{11.75} \right] = 2.574$				
$f(x_{n+1}) = f(2.574) = (2.574)^3 - 7(2.574) + 1 = 0.04$				

*Langkah 3* : Apakah  $|f(x_{n+1})| \leq 0.03$ ? Jika ya, maka  $x_{n+1} = 2.574$  merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut, jika tidak, ulangi *langkah 2* dengan  $x_n = 2.574$ . Dikarenakan  $|f(x_{n+1})| = 0.04 > 0.03$  maka ulangi langkah 2 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

No	$x_n$	$x_{n+1}$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$
1.	2.5	2.574	-0.875	0.04
2.	2.574	<u>2.573</u>	0.04	0.02
$ f(x_{n+1})  = 0.02 < 0.03$ maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu $x = 2.573$ .				

$$|f(x_{n+1})| = 0.04 > 0.03$$

# Secant

- Disebut juga Metode Interpolasi Linear
- Dalam prosesnya tidak dilakukan penjepitan akar  
 $[x_0, x_1]$  tidak harus mengandung akar yang akan dicari, sehingga  $f(x_0)$  dan  $f(x_1)$  bisa bertanda sama.
- Mencari  $x_2$ , yaitu

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

- Untuk iterasi berikutnya akan diperoleh interval baru  $[x_0, x_1]$  dengan cara pergeseran:  $x_0 \leftarrow x_1$  ,  $x_1 \leftarrow x_2$
- Iterasi berlangsung sampai batas maksimum atau sampai dipenuhinya batas Toleransi (T).

**Contoh:**

Tentukan solusi dari persamaan non-linier:

$$y = x^3 - 7x + 1$$

dengan error 0.03.

*Penyelesaian:*

*Langkah 1:* Menentukan  $x_1$  dan  $x_0$ .

Misalkan dipilih  $x_1 = 2,5$  dan  $x_0 = 2,3$

*Langkah 2 :* Hitung  $f(x_0)$ ,  $f(x_1)$ ,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_0 - x_1)}{f(x_0) - f(x_1)}, \text{ dan } f(x_2).$$



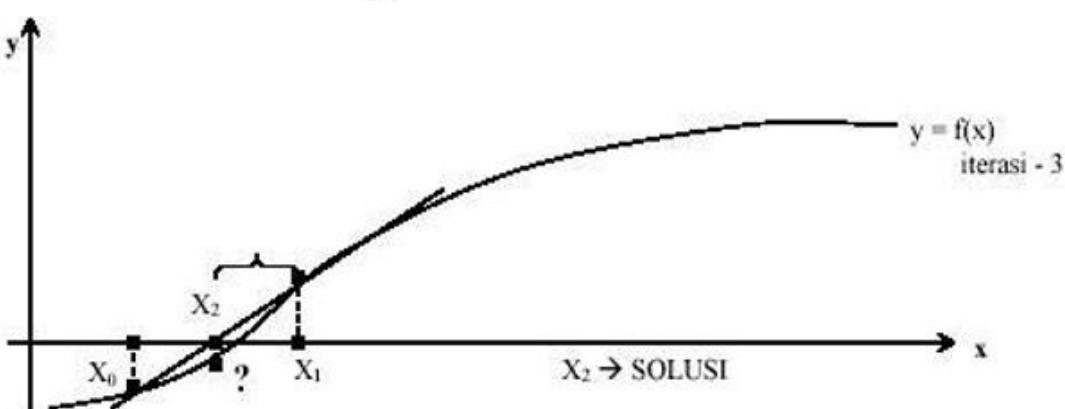
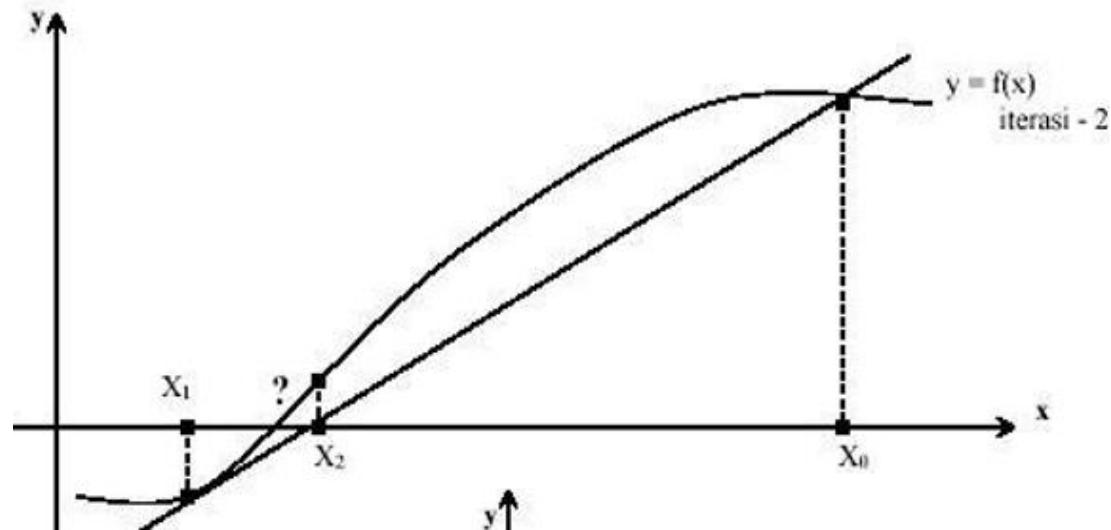
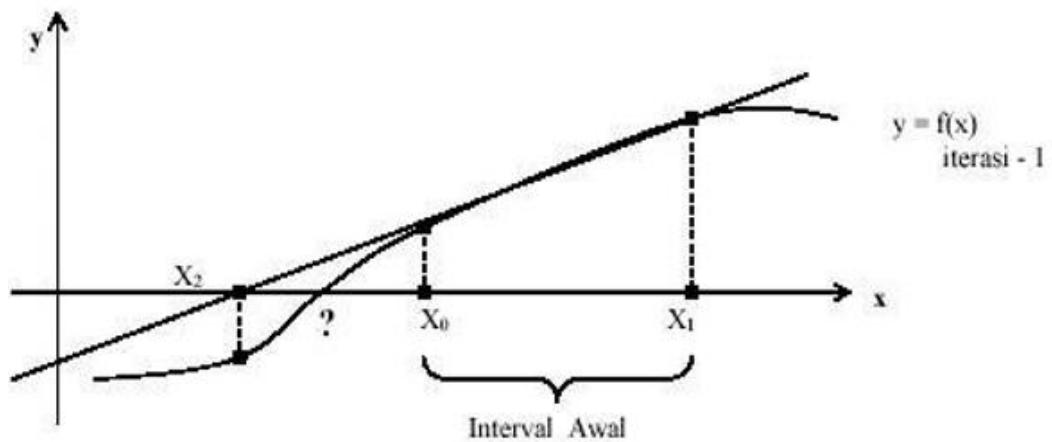
*Langkah 3* : Apakah  $|f(x_2)| \leq 0.03$ ? Jika ya, maka  $x_2 = 2.585$  merupakan solusi dari persamaan non linier tersebut, jika tidak, ulangi *langkah 2* dengan  $x_1$  menjadi  $x_0$  dan  $x_2$  menjadi  $x_1$ .

Dikarenakan  $|f(x_2)| = 0.18 > 0.03$  maka ulangi langkah 2 sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

No	$x_0$	$x_1$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$x_2$	$f(x_2)$
1.	2.3	2.5	-2.933	-0.875	2.585	0.18
2.	2.5	2.585	-0.875	0.18	2.57	-0.015

$$|f(x_2)| = \\ 0.18 > \\ 0.03$$

$|f(x_2)| = 0.015 \leq 0.03$  maka iterasi dihentikan dan diperoleh solusi persamaan non linier yang diinginkan yaitu  $x = 2.57$ .



# Fixed Point Iteration

Metode iterasi titik tetap adalah metode yang memisahkan  $x$  dengan sebagian  $x$  yang lain sehingga diperoleh :  $x = g(x)$  atau dalam bentuk persamaan iterasi,

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

misal:

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = (x^2 + 3)/2$$

$$\sin(x) = 0 \rightarrow x = \sin(x) + x$$

## **Algoritma Metode Iterasi Titik Tetap**

1. Definisikan  $F(x)$  dan  $g(x)$ .
2. Tentukan toleransi error ( $e$ ) dan iterasi maksimum ( $n$ ).
3. Tentukan pendekatan awal  $x_0$
4. Untuk iterasi = 1 s/d  $n$  atau  $F(x \text{ [iterasi]}) \geq e$  :  
$$x_i = g(x_{i-1}) \text{ dan hitung } F(x_i)$$
5. Akar adalah  $x$  terakhir yang diperoleh.

**Contoh:**

Selesaikan  $x + e^x = 0$ , maka persamaan diubah menjadi  $x = e^x$  atau  $g(x) = e^x$ .

# Penyelesaian:

Ambil titik awal di  $x_0 = -1$ , maka

Iterasi 1 :  $x = -e-1 = -0,3679$  dan  $F(x) = 0,3243$

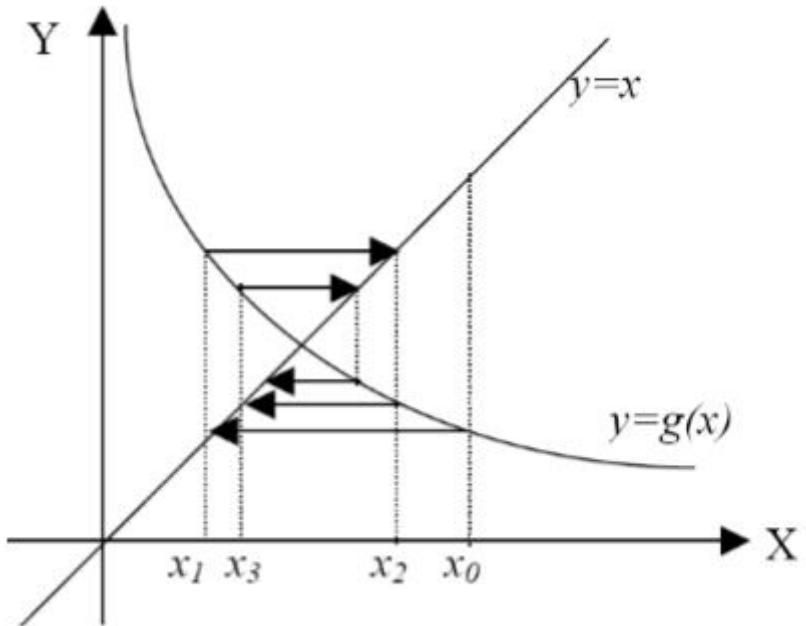
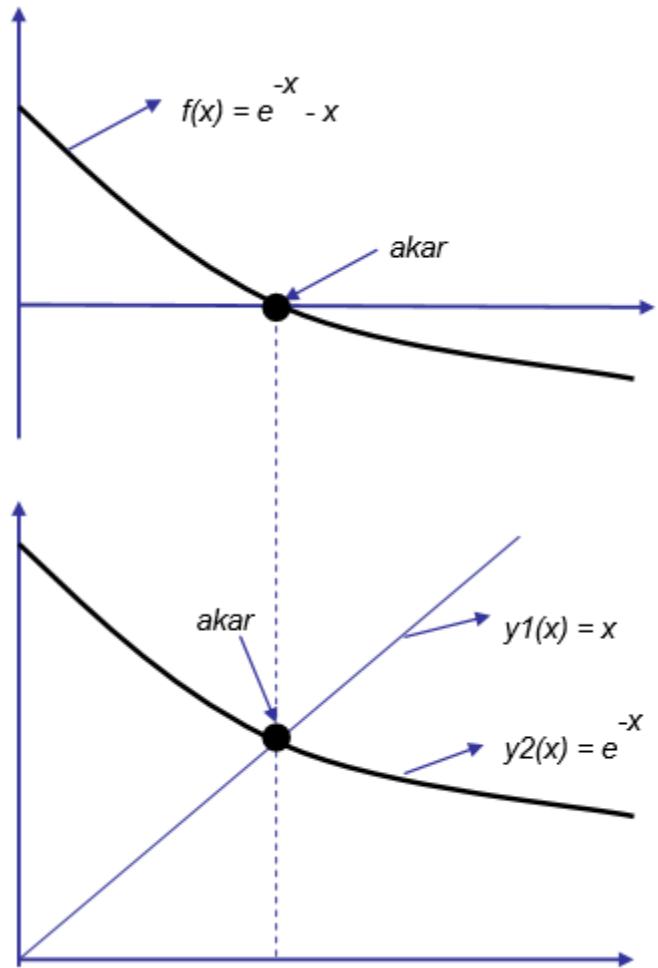
Iterasi 2 :  $x = -e-0,3679 = -0,6922$  dan  
 $F(x) = -0,19173$

Iterasi 3 :  $x = -e-0,6922 = -0,50047$  dan  
 $F(x) = 0,10577$

Iterasi 4 :  $x = -e-0,50047 = -0,60624$  dan  
 $F(x) = -0,06085$

Iterasi 5 :  $x = -e-0,60624 = -0,5454$  dan  
 $F(x) = 0,034217$

Pada iterasi ke 10 diperoleh  $x = -0,56843$  dan  
 $F(x) = 0,034217$ .





thank you

