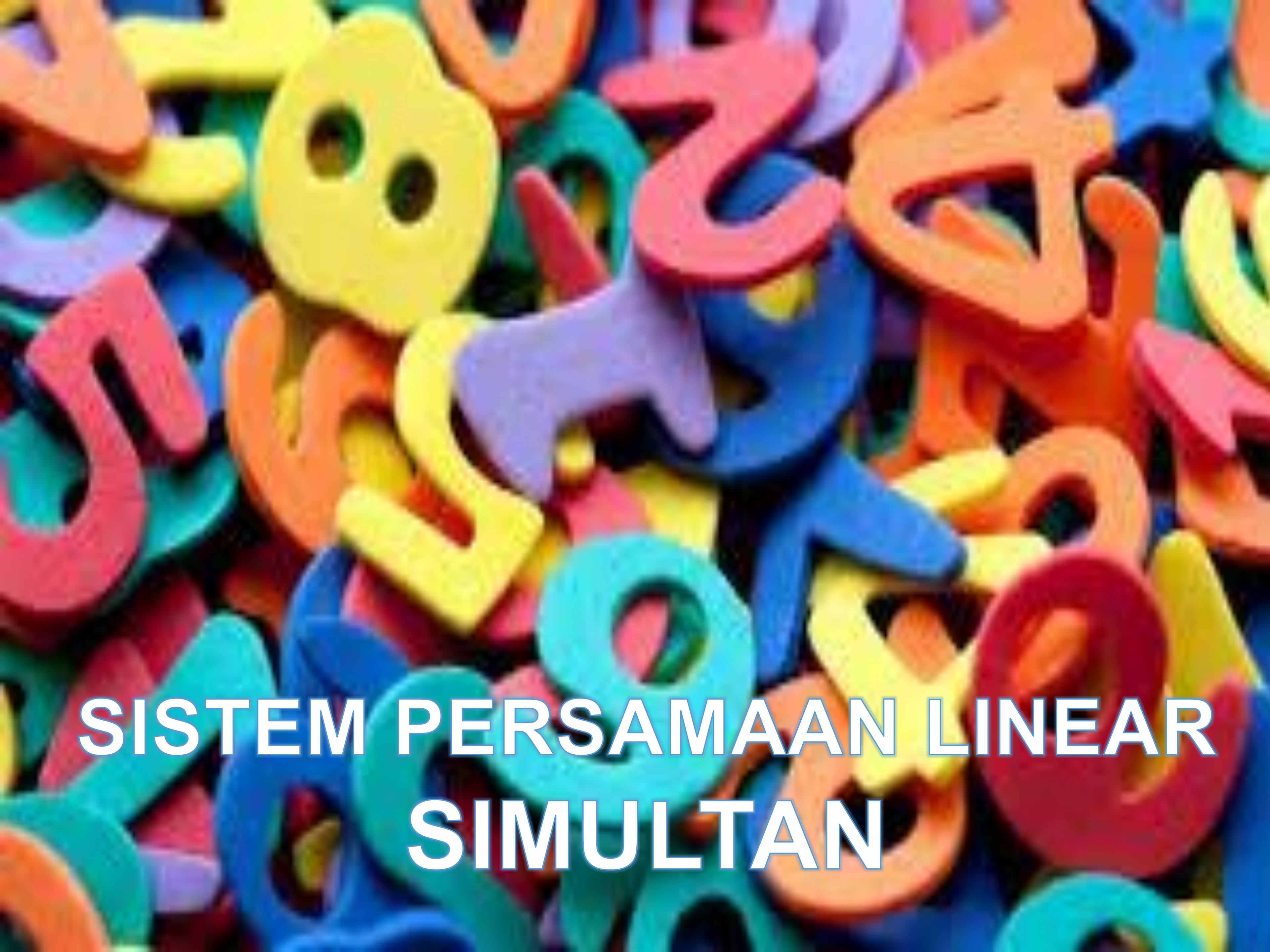

SISTEM PERSAMAAN LINEAR SIMULTAN

Sistem Persamaan Linear

- Misal terdapat SPL dengan n buah variabel bebas

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = C_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = C_n$$

Matriks: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear (SPL)

- Algoritma Gauss Naif
- Algoritma Gauss Jordan
- Algoritma Gauss Seidel
- Aturan Cramer

Algoritma Gauss Naif

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} \ldots\ldots & (E_1) \\ \ldots\ldots & (E_2) \\ \ldots\ldots & (E_3) \end{matrix}$$

Forward Elimination

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \end{Bmatrix}$$

Upper Triangular System

Back Substitution

$$x_3 = b''_3 / a''_{33}$$

$$x_2 = (b'_2 - a'_{23}\, x_3) / a'_{22}$$

$$x_1 = (b_1 - a_{12}\, x_2 - a_{13}\, x_3) / a_{11}$$

Contoh Algortima Gauss Naif

- Diketahui SPL:

  $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

  $3x_1 - x_2 + x_3 = 1$

  $x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$
- Bagaimana penyelesaiannya?

Penyelesaian:

- Matriks yang terbentuk:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Langkah:

1.

$$\frac{1}{2} b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

2. dan 3.

$$b_2 - 3b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & -4 & -\tfrac{1}{2} \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. dan 5.

$$b_3 - b_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \tfrac{1}{2} \\ 0 & -4 & -\tfrac{1}{2} \\ 0 & 3 & -\tfrac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

6.

$$-\frac{1}{4}b_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/8 \\ 0 & 3 & -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. dan 8.

$$b_3 - 3b_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & -15/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/4 \\ -15/4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

- Hasil:

$$
\begin{aligned}
-\tfrac{15}{8} \cdot x_3 &= -\tfrac{15}{4} \\
x_3 &= 2
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_2 + \tfrac{1}{8} x_3 &= \tfrac{5}{4} \\
x_2 &= \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{8}(2) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \tfrac{1}{2} x_3 &= 2 \\
x_1 &= 2 - (1) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot 2\right) = 0
\end{aligned}
$$

Algoritma Gauss Jordan

- Dengan metode Gauss Jordan matriks A diubah sedemikian rupa sampai terbentuk identitas dengan cara :

  $\left[A \mid I\right]X = C$ diubah menjadi $\left[I \mid A^{-1}\right]X = C^*$

  C* merupakan matriks C yang sudah mengalami beberapa kali transformasi, sehingga:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & A^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \\ \vdots \\ C_n^* \end{bmatrix}$$

$$x_1 = C_1^*$$
$$x_2 = C_2^*$$
$$x_n = C_n^*$$

Algoritma Gauss Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \ldots\ldots\ (E_1) \\ \ldots\ldots\ (E_2) \\ \ldots\ldots\ (E_3) \end{array}$$

Elimination

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^* \\ 0 & 1 & 0 & b_2^* \\ 0 & 0 & 1 & b_3^* \end{array}\right]$$

NO Back Substitution

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= b^*_1 \\ x_2 &= b^*_2 \\ x_3 &= b^*_3 \end{aligned}}$$

Contoh Algoritma Gauss Jordan:

- Diketahui SPL:

  $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$

  $3x_1 - x_2 + x_3 = 1$

  $x_1 + 4x_2 - x_3 = 2$

- Bagaimana penyelesaiannya?

Penyelesian

- Langkah:

1.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.
$$\frac{1}{2}b_1\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

3.

$$\begin{array}{l} \\ b_2 - 3b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -\tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.

$$-\frac{1}{4} b_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \tfrac{1}{8} & \tfrac{3}{8} & -\tfrac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -\tfrac{3}{2} & -\tfrac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \tfrac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

5.

$$\begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ b_3 - 3b_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -15/8 & -13/8 & 3/4 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 5/4 \\ -15/4 \end{bmatrix}$$

6.

$$-\frac{8}{15} b_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3/8 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13/15 & -6/15 & -8/15 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 5/4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian (lanjutan)

7. $\begin{array}{l} b_1 - \frac{3}{8} b_3 \\ b_2 - \frac{1}{8} b_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{15} & -\frac{6}{15} & -\frac{8}{15} \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Jadi: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Algoritma Gauss Seidel

- Sering dipakai untuk menyelesaikan persamaan yang berjumlah besar.
- Dilakukan dengan suatu iterasi yang memberikan harga awal untuk $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$.
- Metode ini berlainan dengan metode Gauss Jordan dan Gauss Naif karena metode ini menggunakan iterasi dalam menentukan harga $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$.
- Kelemahan metode eliminasi dibandingkan metode iterasi adalah metode eliminasi sulit untuk digunakan dalam menyelesaikan SPL berukuran besar.

Algoritma Gauss Seidel

1. Beri harga awal $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$
2. Hitung
$$x_1 = \frac{C_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$
Karena $x_2 = x_3 = x_4 = ... = x_n = 0$, maka
$$x_1 = \frac{C_1}{a_{11}}$$

Algoritma Gauss Seidel

3. x_1 baru yang didapat dari tahap 2 digunakan untuk menghitung x_2.

   Baris 2 $\rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Algoritma Gauss Seidel

4. Menghitung x_3

   Baris 3 $\rightarrow$ $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = C_3$

   $a_{33}x_3 = C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - ... - a_{3n}x_n$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \ldots - a_{3n}x_n}{a_{33}}$$

$$x_3 = \frac{C_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Algoritma Gauss Seidel

5. Cara ini diteruskan sampai ditemukan x_n.
6. Lakukan iterasi ke-2 untuk menghitung x_1, x_2, x_3, ..., x_n baru

$$x_1 = \frac{C_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{C_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n}{a_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{C_n - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Algoritma Gauss Seidel

7. Mencari kesalahan iterasi $|\varepsilon_a|$ dengan cara:

$$x_i \Rightarrow |\varepsilon_a| = \left| \frac{x_{i(baru)} - x_{i(lama)}}{x_{i(baru)}} \right| * 100\%$$

$$\vdots$$

$$x_n \Rightarrow |\varepsilon_a| = \left| \frac{x_{n(baru)} - x_{n(lama)}}{x_{n(baru)}} \right| * 100\%$$

8. Iterasi diteruskan sampai didapat $|\varepsilon_a| < |\varepsilon_s|$

Contoh Algoritma Gauss Seidel

- Diketahui SPL:

$x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -51$

$4x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 61$

$12x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$

dan $\varepsilon_a = 5\ \%$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 4 & -4 & 9 \\ 12 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 \\ 61 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

- Iterasi ke-0

  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

- Iterasi ke-1

$$x_1 = \frac{-51}{1} = -51 \qquad x_2 = \frac{61 - 4x_1}{-4} = \frac{61 - 4(-51)}{-4} = -66{,}25$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - (-51) + (-66{,}25)}{3} = 184{,}58$$

Penyelesaian (lanjutan)

- Iterasi ke-2

$$x_1 = \frac{-51 - 7x_2 + 3x_3}{1} = \frac{-51 - 7(-66{,}25) + 3(184{,}58)}{1} = 966{,}49$$

$$x_2 = \frac{61 - 4x_1 - 9x_3}{-4} = \frac{61 - 4(966{,}49) - 9(184{,}58)}{-4} = 1366{,}55$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - 12(966{,}49) + (1366{,}55)}{3} = -3407{,}78$$

Penyelesaian (lanjutan)

- Iterasi ke-3

$$x_1 = \frac{-51 - 7x_2 + 3x_3}{1} = \frac{-51 - 7(1366{,}55) + 3(-3407{,}78)}{1} = -19840{,}19$$

$$x_2 = \frac{61 - 4x_1 - 9x_3}{-4} = \frac{61 - 4(-19840{,}19) - 9(-3407{,}78)}{-4} = -27522{,}94$$

$$x_3 = \frac{8 - 12x_1 + x_2}{3} = \frac{8 - 12(-19840{,}19) + (-27522{,}94)}{3} = 70189{,}11$$

- Perhitungan x_1, x_2, x_3 diteruskan sampai semua $|\varepsilon_a| < |\varepsilon_s|$

Penyelesaian (lanjutan)

Iterasi ke-	Nilai x	ε_a
0	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ $x_3 = 0$	
1	$x_1 = -51$ $x_2 = -66,25$ $x_3 = 184,58$	
2	$x_1 = 966,49$ $x_2 = 1366,55$ $x_3 = -3407,78$	$\varepsilon_a = 105,28\ \%$ $\varepsilon_a = 104,85\ \%$ $\varepsilon_a = 105,42\ \%$
3	$x_1 = -19840,19$ $x_2 = -27522,94$ $x_3 = 70189,11$	$\varepsilon_a = 104,87\ \%$ $\varepsilon_a = 104,97\ \%$ $\varepsilon_a = 104,86\ \%$

Koefisien Relaksasi (λ)

- Tujuan:

  Perbaikan konvergensi dalam Gauss Seidel.
- Biasanya koefisien relaksasi dipilih sendiri berdasarkan masalah yang dihadapi.
- Jika SPL tidak konvergen, λ yang bernilai antara 0 s/d 1 disebut Under Relaksasi.
- λ antara 1 dan 2 biasanya digunakan untuk mempercepat konvergensi suatu sistem persamaan yang konvergen, disebut Over Relaksasi.

Koefisien Relaksasi (λ)

- Rumus (nilai SPL) dengan menggunakan λ

$$x_i^{baru} = \lambda \cdot x_i^{baru} + (1-\lambda) \cdot x_i^{lama}$$

Contoh Koefisien Relaksasi (λ)

Iterasi ke-	Nilai x	dengan λ (1,5)
0	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	
1	$x_1 = 10$ $x_2 = 15$	
2	$x_1 = 6$ $x_2 = 7{,}5$	x_1 baru = 4 x_2 baru = 3,75
3	$x_1 = 4$ $x_2 = 3{,}75$	

Contoh perhitungan :

x_1 baru

$= 1{,}5 \;\mathbf{.}\; 6 + (1 - 1{,}5) \;\mathbf{.}\; 10$

$= 9 + (-0{,}5) \;\mathbf{.}\; 10$

$= 4$


Thank you