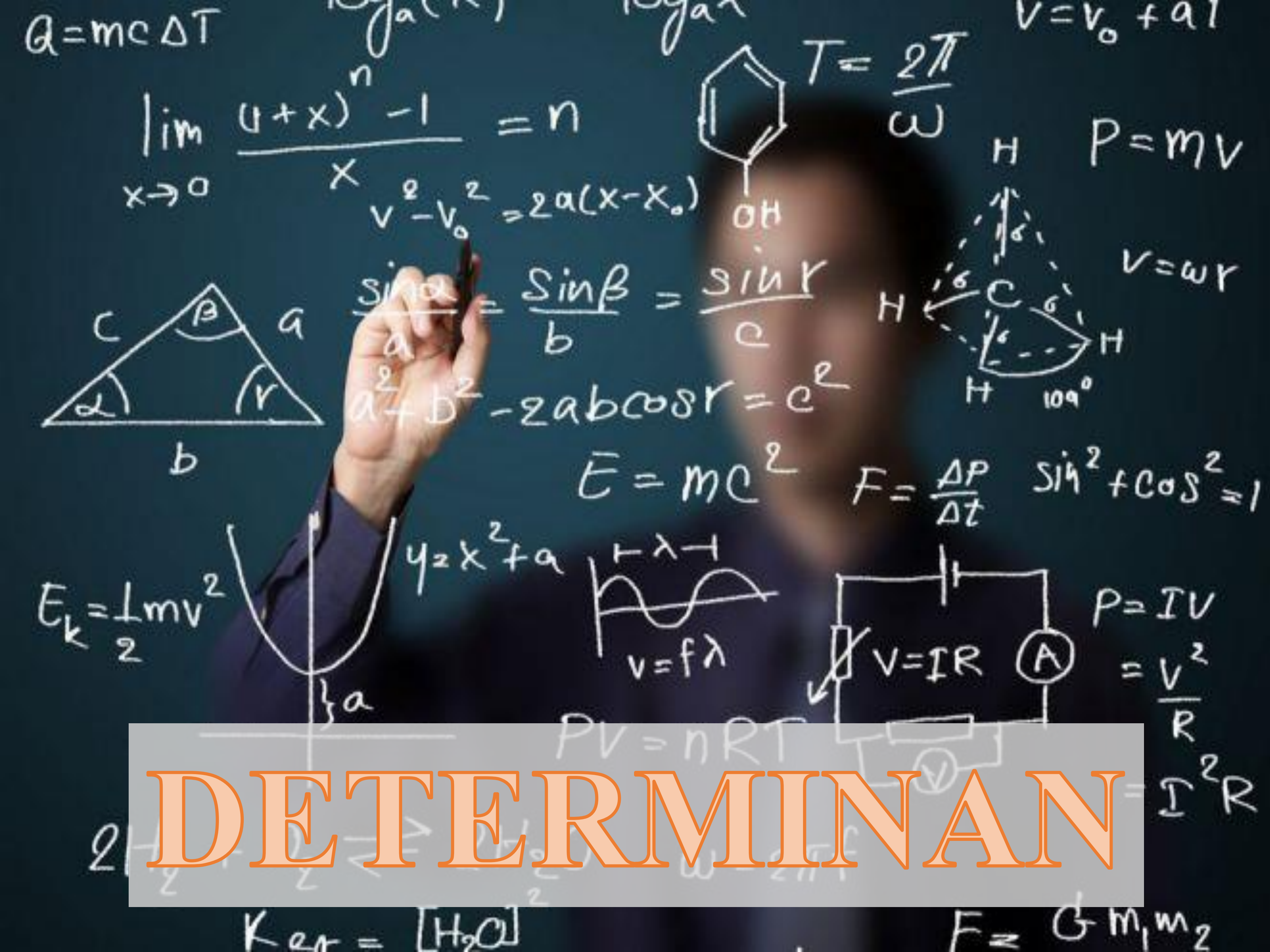

DETERMINAN

Bahasan

- Determinan
- Determinan orde-ketiga
- Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui
- Konsistensi suatu set persamaan
- Sifat-sifat determinan

Determinan

- Suatu determinan orde n terdiri dari n^2 bilangan yang disebut elemen-elemen yang tersusun dalam n baris dan n kolom, dan dibatasi oleh dua buah garis vertikal.
  - Huruf = kolom
  - Subskrip = baris

Orde 1

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 \end{vmatrix}$$

Orde 2

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Orde 3

Determinan

- Persamaan simultan

$$2x + 3y + 2 = 0$$
$$3x + 4y + 6 = 0$$

- Penyelesaian dengan metode eliminasi

$$8x + 12y + 8 = 0$$
$$9x + 12y + 18 = 0$$

- Diperoleh $x + 10 = 0$, sehingga $x = -10$ dan akhirnya $y = 6$

Determinan

- Memecahkan dua persamaan linier simultan:
- Menghasilkan:

$$a_1x+b_1y+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+d_2=0$$

- Mempunyai sebuah solusi yang tersedia

$$x=\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$y=-\frac{a_1d_2-a_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0$$

Determinan

- Notasi singkat untuk pernyataan $a_1 b_2 - a_2 b_1$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- Simbol: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- (dievaluasi dengan perkalian silang) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- Disebut **determinan orde-kedua** (karena determinan ini punya 2 baris dan 2 kolom)

Determinan

- Sehingga:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ and } y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- dimana:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Determinan

- Ketiga determinan: $\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

  dapat diperoleh dari kedua persamaan sebagai berikut:

$$a_1x+b_1y+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+d_2=0$$

$$\text{omit the constant terms to form } \Delta_0=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{omit the } x \text{ terms to form } \Delta_1=\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

$$\text{omit the } y \text{ terms to form } \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Determinan

- Persamaan:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- Dapat ditulis sebagai:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_0}$$

Contoh

- Perhatikan persamaan:

  3x+2y-5=0

  4x+3y-7=0

- a_1b_2-a_2b_1=1

- Ingat!

$$a_1x+b_1y+d_1=0$$

$$a_2x+b_2y+d_2=0$$

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{-y}{-1}=\frac{1}{1}$$

$$x=y=1$$

Determinan Orde-Ketiga

- Sebuah determinan orde-ketiga punya 3 baris dan 3 kolom.
- Setiap elemen determinan dikaitkan dengan minornya yang diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang berisi elemen yang bersangkutan.
- Sebagai contoh:

the minor of a_1 is $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ obtained thus $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Determinan Orde-Ketiga

- **Menentukan nilai determinan orde-ketiga**
  - Untuk menguraikan determinan orde-ketiga, kita dapat menulis masing-masing elemen di sepanjang baris atas, mengalikannya dengan minornya, dan memberi suku-sukunya tanda plus dan minus secara bergantian

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinan Orde-Ketiga

- **Menentukan nilai determinan dengan mengekspansi pada sebarang baris dan kolom**

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Contoh

- Contoh 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 54 + 12 = -30$$

- Contoh 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12 - 64 + 22 = -30$$

Persamaan Simultan Dengan Tiga Bilangan Tidak Diketahui

- Persamaan:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0$$

- Punya solusi:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

- Lebih mudah diingat sebagai:

$$\frac{x}{\Delta_1}=\frac{-y}{\Delta_2}=\frac{z}{\Delta_3}=\frac{-1}{\Delta_0}$$

Contoh

- Cari nilai x dari persamaan:

  2x+3y-z-4=0

  3x+y+2z-13=0

  x+2y-5z+11=0

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{-1}{\Delta_0}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -13 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{-56} = \frac{-1}{28}$$

$$\therefore x = 2$$

Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Perhatikan!

$$3x - y - 4 = 0$$
$$2x + 3y - 8 = 0$$
$$x - 2y + 3 = 0$$

- Perhatikan lagi!

$$3x + y - 5 = 0$$
$$2x + 3y - 8 = 0$$
$$x - 2y + 3 = 0$$

Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Tiga persamaan simultan dengan dua bilangan tidak diketahui akan konsisten jika determinan koefisiennya adalah nol

$$
\begin{aligned}
a_1x+b_1y+d_1&=0\\
a_2x+b_2y+d_2&=0\\
a_3x+b_3y+d_3&=0
\end{aligned}
\qquad
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=0
$$

Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Contoh uji konsistensi

$$2x + y - 5 = 0$$
$$x + 4y + 1 = 0$$
$$3x - y - 10 = 0$$

- Tentukan nilai k agar set persamaan konsisten

$$3x + y + 2 = 0$$
$$4x + 2y - k = 0$$
$$2x - y + 3k = 0$$

Sifat-sifat Determinan

1. Nilai suatu determinan **tetap** tidak berubah jika barisnya diubah menjadi kolom dan kolom menjadi baris

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2. Jika dua baris (atau kolom) **disaling-tukarkan**, tanda determinan tersebut berubah

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Sifat-sifat Determinan

3. Jika dua baris (atau kolom) **identik**, nilai determinan tersebut sama dengan nol

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Jika elemen sebarang satu baris (atau kolom) semuanya dikalikan dengan faktor persekutuan, determinannya dikalikan dengan faktor tsb

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Sifat-sifat Determinan

5. Jika elemen sebarang baris (atau kolom) diperbesar (atau dikurangi) oleh kelipatan elemen yang sama dari elemen yang bersesuaian dari baris (atau kolom) lain, nilai determinan tersebut **tidak berubah**

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2+ka_1 & b_2+kb_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Hasil Pembelajaran

- Mengekspansi suatu determinan 2x2
- Menyelesaikan pasangan persamaan linier simultan dengan dua variabel menggunakan determinan 2x2
- Mengekspansi suatu determinan 3x3
- Menyelesaikan tiga persamaan linier simultan dengan tiga variabel menggunakan determinan 3x3
- Menentukan konsistensi dari set-set persamaan linier simultan
- Menggunakan sifat-sifat determinan untuk menyelesaikan persamaan yang ditulis dalam bentuk determinan

Referensi

- Stroud, KA & DJ Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Erlangga. Jakarta
- Ayres, Frank and Philip A Schimidt. 2003. *Matematika Universitas*. Erlangga. Jakarta.