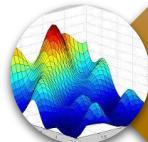


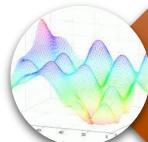
# Optimization



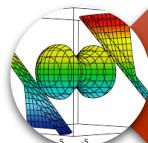
Unconstrained Multivariable Optimization



Nonlinear Programming with Constraints



Global Optimization for Problems with  
Continuous and Discrete Variables



Intro to Advanced Optimization Methods



# Unconstrained Multivariable Optimization

# Introduction

- Inti persoalan optimasi adalah memilih alternative terbaik berdasarkan kriteria tertentu yang tersedia.
- Kriteria yang paling umum:
  - 1) **maximize** → memaksimumkan keuntungan perusahaan, utilitas konsumen, dan laju perubahan volume usaha.
  - 2) **Minimize** → meminimum biaya dalam berproduksi. Secara ekonomi kita dapat mengkategorikan persoalan maksimisasi dan minimisasi dengan istilah optimasi, artinya mencari yang terbaik.

# TEKNIK PENENTUAN TITIK OPTIMUM

➤ Misalnya suatu fungsi  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\frac{dY}{dX_1} = F_1 = 0 \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dX_2} = F_2 = 0 \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$\frac{dY}{dX_n} = F_n = 0 \dots \dots \dots \quad (n).$$

➤ Untuk menentukan nilai optimal fungsi, maka turunan parsial (partial derivatif) pertama dari fungsi bernilai nol, sebagai berikut :

➤ Dengan menggunakan aturan subsitusi/eliminasi, atau aturan cramer, aturan invers matriks, dapat ditentukan nilai  $x^*1, x^*2, \dots, x^*n$ .

lanjutan

- Dengan memasukkan nilai  $X^*1, X^*2, \dots X^*n$  kedalam fungsi tujuan akan didapatkan nilai optimal fungsi tersebut ( $Y^*$ ).
- Untuk menguji nilai optimal fungsi ( $Y^*$ ) optimum maksimum atau minimum dapat menggunakan **Hessian Matrix**

lanjutan

Untuk menguji nilai optimal fungsi ( $Y^*$ ) optimum maksimum atau minimum dapat menggunakan Aturan Hessian Matrix :

$$|H_1| = | F_{11} |$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{2n} \\ F_{m1} & F_{m2} & F_{mn} \end{vmatrix}$$

Keterangan :

$f_{ij}$  sebagai unsur matriks Hessian adalah derivatif parsial kedua dari fungsi tujuan.

**Optimum maksimum:**

$|H_1| < 0 ; |H_2| > 0$ ; dan  $|H_3| < 0$ .

**Optimum Minimum :**

$|H_1| > 0 ; |H_2| > 0$ ; dan  $|H_3| > 0$ .

## Contoh 1:

Tentukan nilai optimal dari fungsi :

$Y = 20 X_1 - X_1^2 + 10 X_2 - X_2^2$  dan buktikan apakah nilai optimal  $Y$  adalah optimum maksimum atau minimum.

Penyelesaian :

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = F_1 = 20 - 2X_1 = 0 \dots\dots\dots persamaan (1)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = F_2 = 10 - 2X_2 = 0 \dots\dots\dots persamaan (2)$$

- Persamaan (1) :  $20 - 2X_1 = 0$ ,  
sehingga  $X_1^* = 10$
- Persamaan (2) :  $10 - 2X_2 = 0$ ,  
sehingga  $X_2^* = 5$

➤ Dan nilai optimal fungsi :

$$Y^* = 20(10) - (10)^2 + 10(5) - (5)^2$$
$$Y^* = 125$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_1} = F_1 = 20 - 2X_1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_2} = F_2 = 10 - 2X_2$$

$$F_{11}=-2$$

$$F_{12}=0$$

$$F_{21}=0$$

$$F_{22}=-2$$

## Hessian Matrix:

$$|H1| = |F_{11}| = |F_{12} - 2| \rightarrow |H1| = -2 < 0$$

$$|H2| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$|H2| = (-2 \cdot -2) - (0 \cdot 0)$$

$$|H2| = 4 > 0$$

Apabila :

$$|H1| < 0; |H2| > 0$$

Nilai optimal fungsi adalah **optimum maksimum**

**Penerapan** → kasus diskriminasi harga, kasus perusahaan yang menghasilkan dua produk atau lebih (Joint Product), dan kasus produksi dengan dua atau lebih input.

# Contoh 2

## Kasus Diskriminasi Harga

Perusahaan yang memiliki kekuasaan monopoli melakukan diskriminasi harga di dua tempat (pasar).

➤ Di pasar (1) fungsi permintaan diketahui :

$$P_1 = 80 - 5 \varphi_1$$

➤ Di pasar (2) fungsi permintaan diketahui:

$$P_2 = 180 - 20 \varphi_2$$

➤ Tentukan jumlah  $\varphi_1$  dan  $\varphi_2$  yang diproduksi/dipasarkan untuk mencapai keuntungan maksimum dan buktikan apakah nilai optimal tersebut adalah optimum maksimum Jika total biaya yang dikeluarkan sebesar 50 satuan

**Penyelesaian :**

*Penerimaan total dipasar (1) :*

$$\begin{aligned}TR_1 &= P_1 \cdot \varphi_1 = (80 - 5\varphi_1) \varphi_1 \\&= 80 \varphi_1 - 5\varphi_1^2\end{aligned}$$

*Penerimaan total di pasar (2) :*

$$TR_2 = P_2 \cdot \varphi_2 = 180\varphi_2 - 20\varphi_2^2$$

*Keuntungan ( $\pi$ )*

$$\pi = (TR_1 + TR_2) - TC$$

$$\pi = 80 \varphi_1 - 5\varphi_1^2 + 180\varphi_2 - 20\varphi_2^2 - 50$$

*Keuntungan maksimum ( $\pi^*$ ) :*

Derivatif parsial pertama fungsi keuntungan disamakan dengan nol.

*Keuntungan maksimum ( $\pi^*$ ) :*

Derivatif parsial pertama fungsi keuntungan disamakan dengan nol=0.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1} = F1 = 80 - 10\varphi_1 = 0 \dots \dots \dots \text{ persamaan } (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2} = F2 = 180 - 40\varphi_2 = 0 \dots \dots \dots \text{ persamaan } (2)$$

Persamaan (1) =  $80 - 10\varphi_1 = 0$ , sehingga  $\varphi_1^* = 8$

Persamaan (2) =  $180 - 40\varphi_2 = 0$ , sehingga  $\varphi_2^* = 4,5$

*Nilai optimum keuntungan :*

$$\pi = 80(8) - 5(8)^2 + 180(4,5) - 20(4,5)^2 - 50$$

$$\pi = 675.$$

- Apakah Nilai optimal fungsi maksimum atau minimum dilihat dari derivatif kedua fungsi keuntungan :
- Turunan Pertama Fungsi:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_1} = F1 = 80 - 10\varphi_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \varphi_2} = F2 = 180 - 40\varphi_2$$

- Turunan Kedua:

$$F11 = -10$$

$$F12 = 0$$

$$F21 = 0$$

$$F22 = -40$$

Hessian Matrik :

$$|H1| = |F_{11}| = |-10| = -10 \rightarrow |H_1| = -10 < 0$$

$$|H2| = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -40 \end{vmatrix} = (-10 \cdot -40) - (0 \cdot 0)$$

$$|H2| = +400$$

Nilai optimal fungsi adalah **optimum maksimum**

# Kasus Produksi dengan Dua Input

- Beberapa bentuk fungsi produksi yang telah dikenal selama ini, antara lain fungsi produksi kuadratik, fungsi produksi Cobb-Douglas, dan fungsi produksi Transendental.
- Suatu perusahaan biasanya dalam proses produksi dengan penggunaan satu macam inut dapat menghasilkan dua atau lebih produk.
- Misalkan suatu perusahaan yang menghasilkan dua macam produk dengan mengetahui fungsi permintaan adalah :

$$Q_x = f(P_x, P_y); \quad \text{dan} \quad Q_y = g(P_x, P_y)$$

Dimana :

$Q_x$  = jumlah produk x yang diminta

$Q_y$  = jumlah produk y yang diminta

$P_x$  = harga produk x

$P_y$  = harga produk y

Maka penerimaan (revenue) total:

$$TR = TR_x + TR_y = P_x Q_x + P_y Q_y$$

- Dan jika fungsi biaya bersama (join cost) adalah :

$$TC = f(Qx, Qy)$$

$$\pi = TRx + TRy - TC$$

$$\pi = [PxQx + PyQy] - f(Qx, Qy)$$

- Laba akan maksimum, jika memenuhi syarat pertama yang perlu adalah :

$$\frac{\partial \pi}{\partial Qx} = 0 \quad \frac{\partial \pi}{\partial Qy} = 0$$

Dan syarat kedua yang mencukupkan adalah :

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} < 0$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx \partial Qy} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx \partial Qy} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx^2} \bullet \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qy^2} \right] - \left[ \frac{\partial^2 \pi}{\partial Qx \partial Qy} \right]^2 > 0$$

## Contoh :

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh :

$$C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a \cdot Q_b$$

Harga jual masing-masing barang per unit adalah  $P_a = 7$  dan  $P_b = 20$ .

Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan besarnya keuntungan maksimum tersebut ?

$$\left. \begin{array}{l} R_a = Q_a \cdot P_a = 7Q_a \\ R_b = Q_b \cdot P_b = 20Q_b \end{array} \right\} R = R_a + R_b = 7Q_a + 20Q_b$$

$$\pi = R - C = 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a \cdot Q_b$$

Agar л maksimum, л' = 0

$$(1) \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0 \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0$$

$$(2) \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0 \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0$$

Dari (1) dan (2) diperoleh  $Q_a = 2$  dan  $Q_b = 3$

Jadi Laba Maksimum adalah :

$$= 7Q_a + 20Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a \cdot Q_b$$

$$7(2) + 20(3) - (2)^2 - 3(3)^2 - (2)(3) = 37$$

- ✓ Jadi agar keuntungan maksimum, perusahaan harus memproduksi dua unit *A* dan 3 unit *B* dengan keuntungan sebesar 37.
- ✓ Kasus di atas juga dapat diselesaikan melalui nilai-nilai marjinalnya; yakni dengan memformulasikan penerimaan marjinal masing-masing barang sama dengan biaya marjinal barang yang bersangkutan,  $MR = MC$

- Maka soal tersebut dapat diselesaikan. Laba Maksimum adalah:

$$MR_a = MC_a \quad \text{dan} \quad MR_b = MC_b$$

$$R = 7Q_a + 20Q_b$$

$$C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a \cdot Q_b$$

$$MR_a = R'_{a'} = 7$$

$$MC_a = C'_{a'} = 2Q_a + Q_b$$

$$MR_b = R'_{b'} = 20$$

$$MC_b = C'_{b'} = 6Q_b + Q_a$$

$$MR_a = MC_a \rightarrow 7 = 2Q_a + Q_b \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0 \quad (1)$$

$$MR_b = MC_b \rightarrow 20 = 6Q_b + Q_a \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0 \quad (2)$$

Dari (1) dan (2),  $Q_a = 2$  dan  $Q_b = 3$ , selanjutnya  $\Pi = 37$ .

Thank  
you!!